Derivasjon i 3MX

En analyse av pilotstudien til TIMSS Advanced 2008 i Norge.

Noe har skjedd i realfagene, men med $f'(t) < 0$.

Ottar Dahl

RDID 4190- Masteroppgave i realfagdidaktikk

Lærerutdanning i realfag (LAP)

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling

Det utdanningsvitenskapelige fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

Vår 2008

1. Forord

Denne masteroppgaven markerer sluttfasen av min tid som student på Lektor- og adjunktprogrammet (LAP) ved Universitetet i Oslo. Dette studieprogrammet var en nyskapning ved UIO høsten 2003, med en mastergrad der PPU var innlemmet i studieløpet. Siden dette studieløpet var helt nytt, har det vært noen utfordringer underveis, der ”veien blir til mens du går” til tider har vært minste fellesnevner (eller største felles mål, disse to begrepene blandes jo så ofte sammen!). Selve arbeidet med masteroppgaven ble avsatt til det siste semesteret, men etter råd fra forskjellig hold, så valgte en liten gruppe studenter å tjuvstarte allerede våren 2007. Initiativet ble tatt av Liv Sissel Grønmo og Torgeir Onstad, som fremmet forslag om å arbeide med deler av PISA og TIMSS- studiene. Dette samarbeidet ble formalisert den påfølgende sommeren med Grønmo og Onstad som veiledere. Høsten 2007 ble litt av fritiden brukt på å lese aktuell litteratur, samt å avgrense problemområdet.

Så lenge jeg kan huske, har jeg alltid vært interessert i matematikk og naturvitenskapelige fag. Da min storebror begynte sin skolegang, var jeg tidlig nysgjerrig i innholdet av matematikkbøkene hans. Mamma og pappa oppdaget raskt med overraskelse, og storebror med fortvilelse, at det var lillebror på knappe 5år som raskest løste regneoppgavene, og som dessuten med et øyekast kunne påvise regnefeil i storebrors beregninger. I løpet av videregående var det noen medelever som i sin fortvilelse over en nær forestående prøve ba om hjelp til å få jaget dette x ”som en rev fra linje til linje med multiplikasjoner, forkortninger, brøker og all verdens djevelskap efter seg, inntil det arme utmattede dyr endelig ble drevet alene over til venstre side”(Kielland 1999 s 32) I hvilken grad denne jakten over stokk og sten var vellykket er det nok delte meninger om, men jeg håper og tror at ikke vondt ble gjort verre. Da jeg fikk høre om det nyopprettede masterprogrammet ved UIO spesielt for dem med en lærer i magen, så var studievalget enkelt.

Derivasjon er et spennende og interessant tema som jeg har vært veldig opptatt av helt siden jeg først lærte om konseptet det første året på videregående skole. Etter at

jeg hadde satt meg inn i de ulike mulighetene for masteroppgave som forelå, bestemte jeg meg tidlig for å arbeide med TIMSS Advanced 2008 og de oppgavene som hører under calculus i denne studien. Under dette temaet finnes blant annet oppgaver om derivasjon og integrasjon, men i denne oppgaven avgrenser jeg fokuset til derivasjon. Utrykket på engelsk er calculus, og ordene ”funksjonsdrøftning”, ”funksjonsanalyse” er begrep som ofte brukes på norsk. Fornorskingen ”kalkulus” har derimot begynt å bre seg litt, se for eksempel Tom Lindstrøms *Kalkulus* som er pensum første året i matematikkstudiet ved universitetet i Oslo. I resten av oppgaven bruker jeg det engelske ordet calculus.

En stor takk må rettes til Grønmo og Onstad. De har æren for å ha lagt alt det praktiske til rette, og har gjennom hele prosessen vært behjelpelig med hva det skulle være. Alle feil og mangler ved masteroppgaven skal likevel bare tilskrives undertegnede.

En stor takk går til fem andre masterstudenter jeg studerer sammen med: Odd Bjørnar Finsådal Andersen, Susanne Strandskogen Hoksnes, Charlotte Jensen, Ole Henrik Ishoel Olsen og Per-Aasmund Utgård. Vi har studert sammen alle disse fem årene på LAP; og uten dem hadde ikke studiet blitt det samme og neppe blitt fullført på nåværende tidspunkt.

En stor takk går også til alle elever, lærere, rektorer, ILS og andre som har deltatt i denne undersøkelsen på ulike måter og har dermed gjort det mulig for meg å jobbe med gode kvalitetssikrede data.

Finally, I’d like to thank my parents, for making the completion of this master thesis possible. And I’d like to thank my wife, for making it necessary.

Oslo, april 2008

Innhold

2. Sammendrag

I denne oppgaven presenteres resultater fra den norske pilotundersøkelsen av TIMSS Advanced 2008. Selve datainnsamlingen ble foretatt i april 2007 blant 700 elever fra videregående skole med fordypning i matematikk (nesten utelukkende 3MX). Mitt utgangspunkt er å undersøke deler av elevenes besvarelser, samt å sammenligne disse resultatene med tidligere undersøkelser. I denne sammenheng har jeg hatt stort utbytte av masteroppgaven til Børge Leiren & Stian Ludvigsen (2005). De testet 413 norske og 151 finske elever i videregående skole i matematikk og sammenlignet resultatene med TIMSS- resultatene fra 1998. Undersøkelsen deres antydet at norske elever gjør det minst like godt som sine finske jevnaldrende (Leiren & Ludvigsen 2005 s. 5), og videre fant de en relativ sterk tilbakegang i resultatene fra 1998 på noen av oppgavene. For eksempel fant de at norske elever behersket derivasjonsreglene noe dårligere enn før, mens det var en forbedring innen derivasjonsoppgaver knyttet til fart og akserelasjon. De knytter dette opp til revisjonen av den norske læreplanen innen matematikk som ble gjennomført i 1999-2000.

I min studie har jeg undersøkt 30 av de til sammen 87 oppgaver i de tre heftene som utgjør pilotstudien til TIMSS Advanced 2008. Av plasshensyn, samt at oppgavene som presenteres fortjener en viss oppmerksomhet, så presenteres bare 12 oppgaver i selve masteroppgaven. Fordelingen rett/blankt for alle 30 oppgavene presenteres imidlertid for å danne et helhetsinntrykk av elevenes besvarelser innen derivasjon. Mange av de 12 oppgavene som presenteres er plukket ut siden de er sammenlignbare med studien til Leiren & Ludvigsen og TIMSS 1995. Andre oppgaver er med fordi de illustrerer noen av de tendensene jeg har funnet i datamaterialet, mens atter andre for å illustrere de minst oppmuntrende delene av datamaterialet. Når vi ser på resultatene fra de 30 oppgavene jeg har undersøkt, så er det grunn til å bli betenkt. Skuffende svakt er vel en merkelapp som i stor grad oppsumerer elevens prestasjoner innenfor derivasjon. Selv om det finnes noen lyspunkt her og der, har arbeidet med datasettet i hovedsak avdekket store mangler og kunnskapshull hos elevene. I gjennomsnitt svarer 25,7 % av elevene korrekt på flervalgsoppgaver, mens 30,0 % svarer blankt. På de åpne oppgavene har 11,8 % delvis korrekt svar, mens 7,1 % har helt korrekt svar. På de åpne oppgavene er det 47,2 % som svarer blankt. Det er dermed klart at norske elever gjør det bedre i flervalgsoppgaver enn i åpne oppgaver, samt at elevene tar oftere et standpunkt på flervalgsoppgaver, mens de i mindre grad gir seg i kast med å skrive ut et matematisk argument som skal til for å løse en åpen oppgave. Dette kan tyde på at det er en tilbakegang fra resultatene både i 1998 og 2005. Særlig stor ser tilbakegangen fra 2005 til 2007 til å være. Vi må likevel være forsiktige med å generalisere disse resultatene. De tre studiene er ikke direkte sammenlignbare av ulike grunner, se kap 6.3. Dette er en pilotundersøkelse, og datamaterialet til hovedundersøkelsen blir først samlet inn våren 2008. For å fastslå om de funnene som denne oppgaven løfter frem er genuine funn, så må hovedundersøkelsen analyseres. Likevel ser vi klare tendenser i en slik pilotstudie, så det er naturlig å tenke seg at hovedundersøkelsen vil i noen grad gi samsvarende resultat, selv om vi naturligvis ikke kan forutsette dette a priori.

Jeg må påpeke at her er det store variasjoner i svarfordelingen fra oppgave til oppgave, faktisk blir prosentandelen som svarer rett dratt opp av at i et mindretall av oppgavene gjør elevene det en del bedre enn i majoriteten av oppgavene. Dermed gjør elevene det hovedsakelig enda svakere enn disse tallene kan indikere. Det fins faktisk eksempel på to oppgaver hvor bare én elev klarer å få maksimal poengsum, d.v.s. bare 0,4 % av elevene svarer helt rett! Her må det for øvrig skytes inn at ingen elever fikk delvis korrekt svar. Dette betyr altså at 99,6 % av elevene egentlig ikke var i nærheten av å løse disse to oppgavene! Selv i mer elementære oppgaver hvor vi ønsker å sjekke om elevene behersker derivasjonsreglene eller tilsvarende elementær kunnskap på et lavt taksonomisk nivå, så er resultatene svake. Den offisielle rapporten kommer ikke før høsten 2009. Personlig venter jeg på den offisielle rapporten fra hovedundersøkelsen med stor interesse, og jeg frykter at funnene fra pilotstudien blir bekreftet.

3. Innledning

3.1 Bakgrunn

Norsk skole, og norske elever har de siste årene kommet i noe dårlig lys i norsk media på grunn av middelmådige og svake resultater i PISA og TIMSS. ”Norge er skoletaper! Hermed er det solid dokumentert.” (Ramnefjell 2001). Dette er overskriften til et intervju med Kristin Clemet da resultatene fra PISA ble offentliggjort 5. desember 2001. Av tabellene framgikk det imidlertid at Norge lå helt på gjennomsnittet blant de rike landene i OECD, så utrykket skoletaper ble dermed gitt et nytt innhold. ”Men denne ’sannheten’ festnet [sic.] seg i media og i folks bevissthet.” (Sjøberg 2008). Med Pisa 2003 og særlig med Pisa 2006 nådde mediafokuseringen et foreløpig høydepunkt, og tilbake sitter inntrykket at norske elever inntar en internasjonal bunnplassering. Den store tilbakegangen i matematikkresultatene fra 1995 til 2003 gir imidlertid grunn til noe uro. ”De norske elevene ligger omtrent et helt skoleår lavere i prestasjon sammenlignet med nivået i matematikk i 1995” (Grønmo m.fl. 2004a s 6). I 2004, etter offentliggjøringen av resultatene for 4. og 8. klasse, skriver VG en artikkel med overskriften ”Svakere enn Ghana og Botswana” (VG URL). Artikkelen fortsetter i sterke ordelag med: ”Blant 51 deltagende land kommer norske 4. klassinger blant annet dårligere ut enn jevnaldrende fra u-landene Ghana og Botswana i sentrale enkeltoppgaver i matematikk.” (VG URL). Artikkelen skriver at Norge er det landet i undersøkelsen med den største tilbakegangen siden 1995. Videre noteres det at i forhold til elever fra de beste østasiatiske landene, så ligger norske elever i 8. klasse faglig sett over tre år etter i matematikk, og to år etter i naturfag!

3.2 Problemfelt og mål for masteroppgaven

TIMSS- undersøkelsen i 2008 heter TIMSS Advanced 2008, og er en studie av spesialistene i videregående skole, elever som tar full fordypning i matematikk og/eller fysikk. En slik studie har bare vært utført én gang før, og dette var i 1995. Opprinnelig deltok Norge ikke i 1995 med matematikkspesialistene våre, bare generalistene[1] og fysikkspesialistene var med. Etter oppfordringen fra KUF (Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet) ble matematikkspesialistene testet våren 1998. Samtidig ble generalistene testet på ny for å undersøke endringer etter innføringen av Reform 94 (TIMSS URLa). Det viste seg at det ikke kunne spores noen vesentlig endring i kunnskapsnivået i realfag etter at Reform 94 ble innført (Angell m.fl. 1999 s 207). Våren 2008 skal det samles inn data til TIMSS Advanced 2008, og en pilotundersøkelse gjennomført våren 2007. Dette materialet danner det empiriske grunnlaget for masteroppgaven, og jeg har analysert deler av elevenes besvarelser i pilotundersøkelsen. I tillegg har jeg sammenlignet med TIMSS undersøkelsen fra 1998 og Leiren & Ludvigsens undersøkelse fra 2005 for å se hvordan nivået blant de norske elevene har utviklet seg i løpet av disse ni årene. Leiren & Ludvigsens brukt utelukkende derivasjonsoppgaver fra TIMSS 1995, derfor er det veldig naturlig å sammenligne med deres resultater, se kap 6.1 for mer.

Oppgaven kan nok brukes som et innspill i skoledebatten. Ønsket er at matematikkundervisningen i norsk skole skal være best mulig, og internasjonale studier er med på å kaste lys over forholdene i norsk skole. Imidlertid må en ikke bli forledet til å tro at internasjonale komparative studier forteller hele sannheten om norske elevers matematikkprestasjoner. Slike undersøkelser kan belyse sider ved matematikkundervisning og elevenes matematikkunnskaper, men gir ikke et fullstendig bilde av tingenes tilstand.

[1] Elever fra allmennfaglig studieretning, handel og kontor, håndverk og industri og noen fra 'andre studieretninger'. (TIMSS URL)

3.2.1 Problemstilling

Særlig to tema har vært særlig sentrale i Norge som en følge av de internasjonale studiene PISA og TIMSS:

- Hvorfor oppnår norske elever så svake resultater i forhold til elever fra andre land som vi naturlig kan sammenligne oss med?
- Hvorfor er den faglige tilbakegangen så stor fra tidligere undersøkelser blant norske elever?

Om resultatene fra disse studiene fortsetter å peke i samme retning, så vil den faglige tilbakegangen bare øke, og da er det grunn til å bli urolig over de matematisk-faglige forholdene i skole-Norge. En faglig tilbakegang i løpet av de årene man har testet elevene i PISA og TIMSS er overraskende, særlig tatt i betraktning at med L97 ble det innført obligatorisk 10-årig skolegang. Til tross for ett ekstra skoleår, er de faglige resultatene likevel dårligere enn før, se kap 4.1.2 og kap 4.2.4.

Leiren & Ludvigsen valgte å begrense seg til derivasjon i deres masteroppgave, og oppgir i hovedsak to grunner til dette (Leiren & Ludvigsen 2005 s 17):

- Derivasjonsregning står sentralt i fordypningskursene i matematikk i den videregående opplæringen.
- Det er på mange måter det første møtet elevene får med matematisk analyse, og er derfor et viktig emne i forhold til fremtidige realfagsstudier.

Det er en del forhold som antyder at norske elever har en dårligere innsikt i dette feltet enn tidligere. Resultatene blant førsteårs studenter innen matematikkrevende studier ser ut til å ha større problemer med pensumet i calculus enn tidligere[2]. Som eksempel kan det nevnes at høsten 2007 var det innmatrikulert 413 studenter i MAT1000 ved UIO, men bare 307 studenter møtte opp til midttermineksamen. Ved den avsluttende eksamen møtte 250 studenter opp, men bare 129 studenter fikk bestått. (Hafstad 2008). Dette gir en strykandel på 48,4 %, men i forhold til den opprinnelige elevgruppen, er det bare 31,2 % som fikk bestått. Av disse var det ingen som fikk beste karakter!

[2] Se også norsk matematikkråds forskunnskapstest, Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2007

Den sentrale posisjonen derivasjon har som skolefag kan nok ikke undervurderes. Derivasjon er en viktig del av temaet calculus, og om dette skriver Dunham:

> It is the bridge that carries students from the basics of elementary mathematics to the challenges of higher mathematics and, as such, provides a dazzling transition from the finite to infinite, from the discrete to the continuous, from the superficial to the profound (Dunham 2005 introduction).

Elever som velger de avanserte matematikkfagene i videregående skole, må derfor ha en solid kunnskap om dette temaet for at de skal ha gode forutsetninger til å fortsette med høyere studier innenfor realfag. Det er derfor naturlig å undersøke resultatene innenfor derivasjon fra pilotstudien til TIMSS Advanced 2008, samt å undersøke utviklingen blant de norske elevene over tid. Det kunne også vært ønskelig å sammenligne resultatene i forhold til internasjonalt snitt, men dette vil ikke bli gjort i denne sammenheng. Grunnen er at fokuset med pilotundersøkelsen er å teste ut oppgaver, for å avdekke om noen av ulike grunner er dårlig egnet. Sammenligningen med andre nasjoner gjøres først i hovedundersøkelsen.

Problemstillingen kan utrykkes med følgende formuleringer:

1. Hvilke kunnskaper i derivasjon har norske matematikkspesialister på slutten av videregående skole?
2. Hvordan har kunnskapsnivået i derivasjon blant norske matematikkspesialister utviklet seg siden 1998?

Det må her understrekes at i en slik pilotundersøkelse, så er det for lav deltagelse til å trekke generelle konklusjoner. Med en slik studie kan en derfor egentlig ikke si med sikkerhet hvilke kunnskapene norske matematikkspesialistene egentlig har. Likevel vil resultatene fra pilotstudien være av interesse, for de vil kunne antyde et mønster. Slike mønster vil i større eller mindre grad kunne bli bekreftet i hovedundersøkelsen.

4. PISA og TIMSS

Dette kapittelet har til hensikt å gi en redegjørelse for disse komparative studiene, samt å gi en oppsummering av hovedresultatene innenfor matematikk i Norge de siste årene.

4.1 PISA

4.1.1 Bakgrunn

PISA ble startet opp i 1997 og er i regi av OECD. PISA er et internasjonalt prosjekt som måler elever i 15-års[3] alder sin kompetanse i de ulike domenene (domains): lesing (reading literacy), matematikk (mathematical literacy) og naturfag (scientific literacy). I flere land vil denne aldersgruppen være i avslutning av obligatorisk skolegang, og PISA ønsker å studere hva elevene behersker innen disse kjernefagene etter at den obligatoriske opplæringen er avsluttet. Et sentralt spørsmål som man ønsker å belyse er om elevene er "forberedt på fremtidens utfordringer" (PISA URLa). Videre ønsker man å få undersøke hvilke faktorer er det som fremmer god læring, og "hvor mye avhenger elevenes prestasjoner av deres hjemmebakgrunn og av skolenes ressurser? " (Kjærnsli m.fl. 2004 s 13). I et spørreskjema fokuseres det blant annet på elevenes holdninger, motivasjon, hjemmebakgrunn, og planer for videre utdanning (Kjærnsli m.fl. 2007 s 11). Lignende spørreskjema er også en del av TIMSS, for utviklingene av disse, se for eksempel Martin & Kelly 1996.

> PISA was designed to collect information promptly and efficiently through three-yearly cycles. It presents data on the reading, mathematical and scientific literacy of the students, schools and countries, provides insights into the

[3] In most OECD countries, compulsory schooling ends at age 15 or 16; in the United States it ends at age 17, and in Belgium, Germany and the Netherlands, at age 18 (Adams m.fl. 2002 s 15)

> factors that that influence the development of the skills at home and at school… (OECD 2003 s 7).

PISA- undersøkelsen gjennomføres hvert tredje år, og hver gang har ett av de tre fagområdene hovedfokus. Den første undersøkelsen var i 2000, med hovedfokus på lesing. I 2003 var det matematikk som sto spesielt sentralt, og et nytt domene ble introdusert, problemløsning (problem solving). I 2006 var det naturfag som sto i en slik særstilling. I denne sammenhengen er det mest interessant med de resultatene som kommer fra matematikkdelen av studiene. Mathematical literacy defineres som:

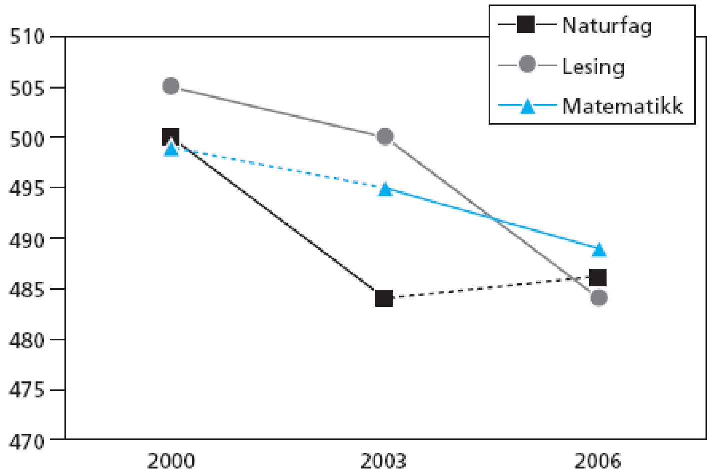
> "Mathematical literacy is an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflective citizen." (PISA URLb).

PISA tar ikke utgangspunkt i landenes læreplaner, men ønsker i større grad å måle elevenes evne til å bruke matematiske kunnskaper og erfaringer i konkrete situasjoner. For en gjennomgang av de fire sentrale ideene som man ønsker å undersøke, se Kjærnsli m.fl. 2007 s 157-158. Disse sentrale ideene er forandring og sammenheng (change and relationships), rom og form (space and shape), tall og mål (quantity) og usikkerhet (uncertainty).

4.1.2 Norske resultater i PISA

I aviser og andre media kan vi få inntrykket av at norske elever presterer katastrofalt dårlig. Dette bildet fortjener nyansering, og det viser seg at norske elever presterer omtrent som gjennomsnittet i OECD-landene, eller litt under. De norske elevene prester som regel svakere enn de andre nordiske landene. Undersøkelsen fra 2006 avdekket at de norske matematikkprestasjonene har en tydelig tilbakegang fra 2000 til 2006. Riktignok er tilbakegangen liten fra gang til gang, men totalt sett, så levnes det liten tvil, se figur 4.1. PISA 2006 avdekket for første gang at de norske prestasjonene er "signifikant svakere enn gjennomsnittet for OECD-landene"

(Kjærnsli m.fl. 2007 s 32). Legg merke til at rammeverket i matematikk og naturfag har blitt forandret noe i løpet av denne perioden, derfor er skalaene ikke direkte sammenlignbare, og er markert med stiplede linjer i figur 4.1. For eksempel er kravene til leseferdighet i naturfagoppgavene senket fra 2003 til 2006. (Kjærnsli m.fl. 2007 s 26).



Figur 4.1 Utvikling av poengresultatene til norske elever i PISA-undersøkelsene i perioden 2000-2006. Feilmarginene til hvert datapunkt er ca 5 poeng. (Kjærnsli m.fl. 2007 s 27)

I matematikkresultatene er det en kjønnsforskjell, men denne er riktignok ikke så stor i Norge. ”Guttene skårer bedre enn jentene i nesten samtlige land, men i Norge er disse forskjellene små.”(Kjærnsli m.fl. 2004 s 243). Guttene presterer bedre enn jentene i alle OECD- land, med unntak av Island (Kjærnsli m.fl. 2007 s 23 og s 174). Dette sitatet gjelder riktignok for studien fra 2006, men at guttene presterer bedre i matematikk er i stor grad en gjentakelse av studien i 2003. I Norge er forskjellene omtrent uforandret i perioden 2000-2006.

4.1.3 Er det kjønnsforskjeller i matematikk?

Det må her skytes inn at kjønnsforskjellene i stor grad er knyttet opp på noen få enkeltoppgaver, og derfor er det litt vanskelig å gi en generell beskrivelse av hva som ligger bak denne kjønnsforskjellen. Et annet funn i PISA 2006 var at de oppgavene som guttene gjorde det mye bedre enn jentene, var noen få flervalgsoppgaver. PISA

2006 fant også at blant guttene var det en større spredning i resultatene enn resultatene hos jentene. (Kjærnsli m.fl. 2007 s 175). At dette spørsmålet krever flere undersøkelser støttes av Wedege: ”This finding is however not consistent with the results in the national school testes, where, in general, no difference is found between girls and boys in mathematics.” (Wedege 2007 s 257). I perioden 2001-2004 ble det gjennomført en studie av svenske ungdomskoleelever, GeMa-studien (Gender and Mathematics). Et av hovedresultatene fra studien er oppsummert med følgende formulering:

> ”The general imagine of mathematics as a gendered domain is divided according to the finding from the GeMa study. In short, female students are perceived to work hard, to wish to understand their work, to worry if they do not do well and to care about doing well. Male students are perceived to find mathematics easy, interesting and useful in their adult life” (Brandell m.fl. 2007 s 246).

Dette funnet er i samsvar med tidligere studier. Kanskje er det litt typisk for jenter å være mer seriøse med skolearbeidet enn gutter? Michèle Cohen undersøkte dette i et historisk perspektiv og fant ”discussions about boys’ ’healthy idleness’ already during the 1920s in England” (Brandell m.fl. 2007 s 247). Og om det er riktig at guttene gjør mindre lekser og jobber mindre seriøst med matematikk, hvorfor ser det ut til at guttene likevel oppnår bedre resultat enn jentene? Det er derfor klart at kjønnsforskjeller innenfor matematikk ikke er godt forstått, ikke alle undersøkelser støtter opp om en hypotese om kjønnsforskjell. Kanskje er det likevel ingen kjønnsforskjell i matematikk når alt kommer til alt? Det er i alle fall klart at her trengs det mer forskning fra flere kanter for å kaste lys over fenomenet.

4.2 TIMSS

4.2.1 Historikk

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) er et internasjonalt komparativt forskningsprosjekt som tar for seg naturfag og matematikk i skolen, i regi av IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement). ”IEA became a legal entity in 1967, but its origins date back to 1958” (IEA URLa). Den første studien ble foretatt i 1959-1960 (Pilot Twelve-Country Study) og resultatene ble publisert i 1962. Dette var en studie av 13-åringer i 12 land, og en undersøkelse “in the five areas of mathematics, reading comprehension, geography, science, and non-verbal ability” (IEA URLb). I 1964 kom en ny studie, denne gang bare i matematikk, og studien fikk navnet FIMS (First International Mathematics Study). En naturfagstudie ble gjennomført i 1970-1971 (FISS). På slutten av 1970-tallet unnfanget man ideen om periodiske studier med mulighet for longitudinelle innslag. I perioden 1980-1982 kom neste undersøkelse i matematikk, SIMS (Second International Mathematics Study). En tilsvarende studie i naturfag, SISS kom i 1983-1984. Til tider er det vanskelig ”å knytte bestemte årstall til disse første store internasjonale undersøkelsene, da de ble gjennomført til forskjellige tider i de ulike landene som deltok” (Grønmo 2004b s 21). Norge deltok ikke i de to første matematikkstudiene, men vi deltok i SISS (Angell m.fl.1999 s 8). Det ble etter hvert besluttet å kombinere matematikk og naturfag til en felles undersøkelse, og i 1994-1995 ble TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) gjennomført. På dette tidspunktet var TIMSS den største og mest ambisiøse internasjonale studien av elevers prestasjoner som noensinne var gjennomført (Angell m.fl.1999 s. 7). TIMSS ble gjennomført for 5 klassetrinn, (elever i 3., 4., 7. og 8. klasse samt siste året på videregående skole). Det ble senere besluttet at de videre studiene skulle forkortes TIMSS, men betydningen er fra og med TIMSS 2003: Trends in International Mathematics and Science Study. De ulike undersøkelsene får navnet TIMSS etterfulgt av et årstall som indikerer hvilken undersøkelse vi snakker om.

Figur 4.2 viser en oversikt over de ulike TIMSS- undersøkelsene som har blitt gjennomført, og de kommende, og hvilke klassetrinn som er med i studien.

	klassetrinn				
studie	3	4	7	8	13
TIMSS 1995	x	x	x	x	x
TIMSS 1999				x	
TIMSS 2003		x		x	
TIMSS 2007		x		x	
TIMSS Advanced 2008					x
TIMSS 2011		x		x	

Figur 4.2 Oversikt over hvilke klassetrinn som er med i de ulike TIMSS- studiene. (informasjon hentet fra Mullis m.fl. 2004 s 15-17*)*

Figur 4.2 viser at etter 1995 har fokusert innsnevret seg på 4. og 8. klassetrinn. TIMSS Advanced 2008 tester elever som går siste året på videregående skole, og figur 4.2 at denne aldersgruppen ikke har blitt testet siden 1995. Formelt deler man inn elevene i tre ulike populasjoner. Fra og med TIMSS 2003 er definisjonen: Populasjon 1 er det øverste klassetrinnet med flest 9-åringer, populasjon 2 er det øverste klassetrinnet med flest 13-åringer (Grønmo 2004b s 24). Populasjon 3 er det siste året på videregående skole. Elevenes gjennomsnittelig alder er ikke den samme i alle land, siden elevene begynner på skolen i ulik alder. Norske elever er ofte litt yngre enn internasjonalt gjennomsnitt (Lie m.fl. 1997 s 23 og Grønmo m.fl 2004b s 16). I fremtiden vil TIMSS fortsette med datainnsamling hvert 4. år, med hovedfokus på 4. og 8. klasse. Norge var ikke med i studien i 1999, men ellers har vi vært med. Videre ble ikke matematikkspesialistene våre testet i 1995, disse ble ikke testet før våren 1998 (Angell m.fl 1999 s 160). Undersøkelsen i 1998 ble gjennomført på samme måte som i 1995, derfor kan resultatene sammenlignes. En god oversikt over hvilke land som har vært med i TIMSS fins i Mullis m.fl. 2004 s 15-17.

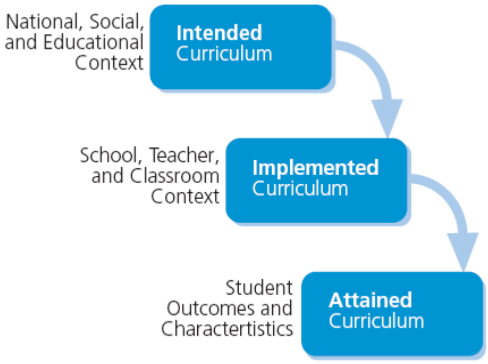
4.2.2 Sentrale mål i TIMSS-studiene

Mullis m.fl. (1998) oppsumerer ambisjonene til TIMSS med følgende formulering: “The scope and complexity of TIMSS is enormous. …with more than 40 countries collecting data in more than 30 different languages. More than half a million students were tested around the world." (Mullis m. fl 1998 s 1).

TIMSS målsetning kan kort oppsummeres med følgende punkter (TIMSS URLb):

- ønsker å undersøke elevenes kunnskaper i matematikk og naturfag.
- studere hvordan kunnskaper henger sammen med faktorer som for eksempel holdninger, kjønn, hjemmebakgrunn, skolearbeid, fritidssysler og undervisningens innhold og organisering.
- studere utvikling over tid ved å sammenlikne nye resultater med resultater fra tidligere TIMSS-undersøkelser.
- prøve å finne fram til faktorer, nasjonalt og internasjonalt, som fremmer god læring og en positiv utvikling innen realfagene i skolen.

TIMSS er i stor grad en læreplanbasert undersøkelse, i motsetning til PISA. I forkant av spørreundersøkelsene blir læreplanene og lærebøker til deltagerlandene undersøkt, og disse danner grunnlaget for hvilke oppgaver som blir gitt. I forkant av studien i 1995 ble det analysert 492 læreplaner og 620 lærebøker (Angell m.fl.1999 s. 12). Oppgavene vil derfor i stor grad være tilpasset pensum til majoriteten av deltagerlandene, og kunnskapen vi ønsker å måle er derfor i stor grad skolekunnskap. Dette høres tilforlatelig ut, men virkeligheten til en læreplan er ikke avgrenset til selve læreplandokumentet. Fra læreplanteori (se for eksempel Engelsen 2006) fins en del begreper, som figur 4.3 prøver å oppklare. Før en læreplan kan nedfelles i et dokument, så ligger det alltid en kontekst bakenfor dette dokumentet. Dette er det som kalles intended curriculum (ideenes læreplan). Ofte vil det være politikere eller andre skoleteoretikere som har tanker om en ny læreplan. Når så dette blir nedfelt i et dokument, er dette et implemented curriculum (den formelle læreplan). Det er denne læreplanen som lærebokforfattere, lærere, skole og elever må forholde seg til. Det som elevene lærer, kalles attained curriculum (den resulterte læreplan). Det er dette siste nivået som kan undersøkes med den faglige prøven i TIMSS. Engelsen har med to begreper til, som fins mellom den formelle læreplan og den resulterte læreplan. Hun bruker 'den oppfattede læreplan' om den tolkningen som gjøres av lærere og andre gjør når de leser læreplandokumentet, og 'den operasjonaliserte læreplan' om den opplæringen som blir gjennomført innenfor rammene til læreplanen. (Engelsen 2006 s 28).



Figur 4.3 TIMSS curriculum model (Mullis m. fl. 2005 s 5)

4.2.3 Matematiske tema og kognetive domener

TIMSS ønsker å teste ulike typer matematisk kunnskap. Tall, algebra og geometri kalles content domains, men hva kan elevene gjøre med denne kunnskapen de besitter? Det har derfor blitt definert tre kognitive domener (knowing, applying and reasoning), og "the cognitive domains describe the sets of behaviors expected of students as they engage with the mathematics content" (Mullis m. fl 2005 s 23). Hva som menes med knowing, applying og reasoning spesifiseres med følgende formulering:

> Understanding a mathematics topic consists of having the ability to operate successfully in three cognitive domains. The first domain, knowing, covers the facts, procedures, and concepts students need to know, while the second, applying, focuses on the ability of students to make use of this knowledge to select or create models and solve problems. The third domain, reasoning, goes beyond the solution of routine problems to encompass the ability to use analytical skills, generalize, and apply mathematics to unfamiliar or complex contexts. (Garden m. fl. 2006 s 17).

Knowing er det laveste nivået, dette er grunnleggende matematiske kunnskaper og ferdigheter som studentene trenger å kjenne. Applying er det neste nivået, der må kunnskapen brukes for å løse problemer. Reasoning er det høyeste nivået, der man kan risikere å måtte bruke kunnskap i nye sammenhenger. Figur 4.4 viser en fordeling av matematiske domener og kognitive dimensjoner for 4. og 8. klasse.

Fourth-Grade Content Domains	Percentages	
Number	50%	
Geometric Shapes and Measures	35%	
Data Display	15%	
Eighth-Grade Content Domains	**Percentages**	
Number	30%	
Algebra	30%	
Geometry	20%	
Data and Chance	20%	
Cognitive Domains	**Percentages**	
	Fourth Grade	**Eighth Grade**
Knowing	40%	35%
Applying	40%	40%
Reasoning	20%	25%

Figur 4.4 Prosentvis fordeling av matematiske emner og kognitive domener for 4. og 8.klasse i TIMSS 2007 (Mullis m. fl. 2005 s 24)

Figur 4.4 viser at tallregning vektlegges mer i 4. klasse enn i 8. klasse. Algebra og geometri undervises vanligvis ikke i 4. klasse, men i praksis fins det noen slike oppgaver under domenet number. I TIMSS Advanced er de matematiske emnene algebra, calculus og geometri, mens de kognitive domene er uforandret, se figur 4.5.

Content Domains	Percentages
Algebra	35%
Calculus	35%
Geometry	30%
Cognitive Domains	**Percentages**
Knowing	35%
Applying	35%
Reasoning	30%

Figur 4.5 Prosentvis fordeling av matematiske emner og kognitive domener for TIMSS Advanced 2008 (Garden m. fl. 2006 s 11)

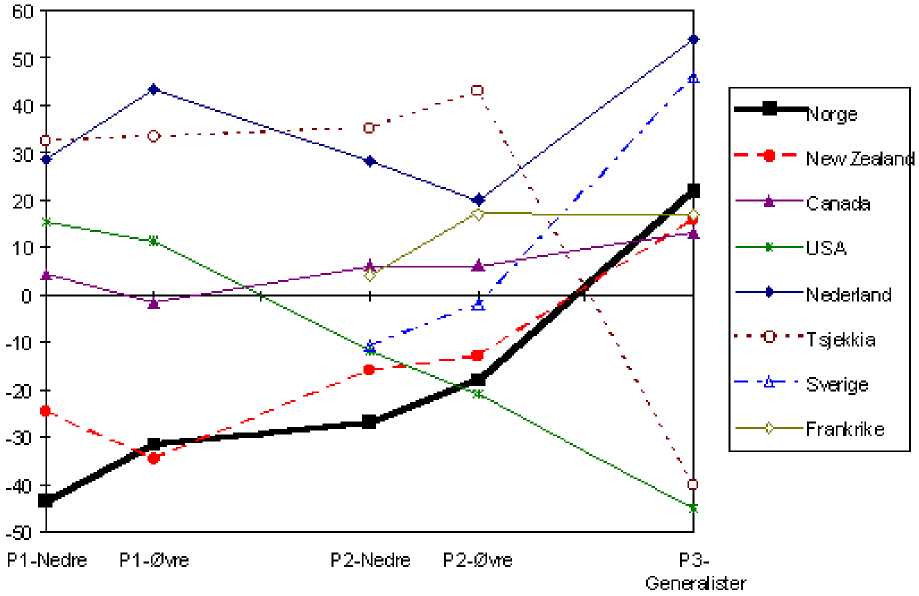
Ved å sammenligne figur 4.4 og figur 4.5 går det fram at elevene blir testet i større grad på et høyere taksonomisk nivå. En slik taksonomisk tilspissing er naturlig, men det virker kanskje overraskende at vi tilsynelatende bare undersøker tre matematiske domener. Dette er tilsynelatende, fordi: "essentially, the TIMSS 2008 Advanced Mathematics assessment consists of the traditional areas of algebra, functions, calculus, geometry, and trigonometry." (Garden m. fl. 2006 s 13). Denne oppfattningen støttes også av å undersøke de oppgavene som danner selve matematikktesten. Innenfor hver av de tre matematiske domenene vil det være oppgaver som hører under de tre kognitive domenene. For en detaljert beskrivelse av hva som forventes av matematiske ferdigheter innen de tre ulike kognitive domenene, se kap 9.2.

Ved å sammenligne med den norske læreplanen R94, så legger vi merke til at de matematiske emnene i TIMSS Advanced ikke sammenfaller fullstendig med R94. Det viser seg for eksempel at derivasjon bare er pensum i 2MX og ikke i 3MX, se kap 9.1. Videre er det noen tema i de norske læreplanene som ikke blir forsøkt testet, særlig læreplanmål innenfor kombinatorikk, sannsynlighetsregning og statistikk. Dessuten har heftene eksempler på oppgaver om komplekse tall, som normalt ikke har vært pensum i norske matematikkurs, derfor gjør norske elever det normalt dårlig på slike spørsmål (Angell m.fl. 1999 s 179). I kap 5.2 argumenterer jeg for at matematikk er en kumulativ vitenskap. Slik undervises også skolefaget, man studerer nye emner som bygger på ting man allerede har studert, og vi forventer at elevene i stor grad behersker disse bakenforliggende emnene. Dermed kan det forsvares å teste elevene i derivasjon, selv om dette strengt tatt ikke er så stor del av pensum inneværende skoleår. Undersøkelser tyder imidlertid på at i noen sammenhenger så klarer elevene bare i liten grad å vedlikeholde kunnskapen, slik at 2MX-elever gjør det bedre enn 3MX-elever i noen sammenhenger, se kap 7.2.4. At calculus har en sentral posisjon i skolematematikken, framheves med følgende formulering:

> Since calculus is a central tool in understanding the principles governing the physical world, it plays a major role in advanced mathematics curricula at this level and merits significant emphasis. Calculus is the principal point of entry to most mathematically-based scientific careers (Garden m. fl. 2006 s 13).

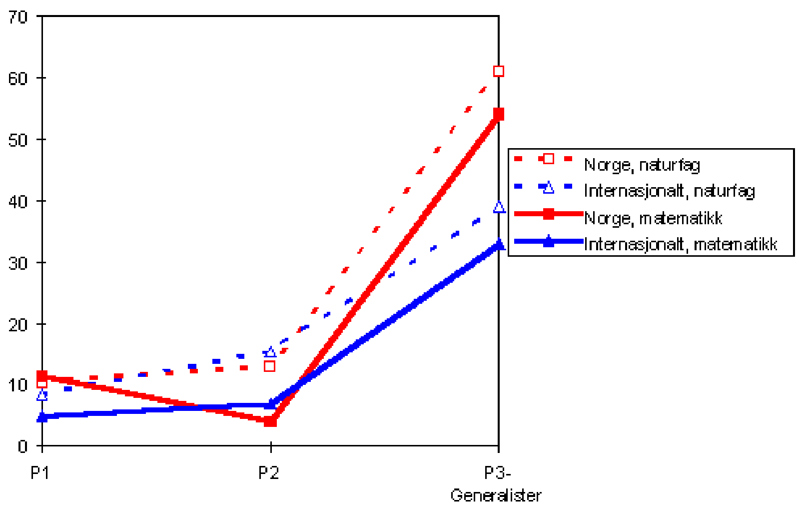
4.2.4 Norske resultater i TIMSS

Norske elever i 8. klasse oppnår resultater som er dårligere enn det internasjonale gjennomsnittet. ”Under dette gjennomsnittet finner vi stort sett land fra den tredje verden og noen få europeiske, deriblant Norge. I en europeisk sammenheng viser norske elever seg som bortimot de aller svakeste i matematikk.” (Grønmo m.fl. 2004a s 5). Også i 4. klasse presterer norske elever dårligere enn internasjonalt gjennomsnitt. Det som imidlertid overrasker mest er den store tilbakegangen for både 4. klasse og 8. klasse fra TIMSS 1995 til TIMSS 2003, både i matematikk og naturfag. ”Vi kan si at norske elever i dag ligger mellom et halvt og ett år etter det nivået like gamle elever lå på i 1995.” (Grønmo m.fl. 2004b s 202). Dette funnet er i overensstemmelse med resultatene i PISA, selv om nedgangen i PISA er noe mindre. Denne oppgaven er i hovedsak interessert i resultatene fra 1995 og 1998 for populasjon 3, og da særlig spesialistene. I 1998 ble elevene som tok kursene 3MX og 3MY karakterisert som matematikkspesialister. For alle de ulike emnene i matematikk, så skårer 3MX-elevene betydelig bedre enn 3MY-elevene. ”Denne forskjellen er like stor selv om vi bare ser på de oppgavene som er innenfor pensum i begge kursene” (Angell m.fl. 1999 s 209). Ved sammenligning med 3MN-levene som tok generalisttesten i 1995, så gjør 3MX-levene i 1998 det signifikant dårligere (Angell m.fl. 1999 s 176). Undersøkelsen fra 1998 avdekker også at det er ingen signifikant kjønnsforskjell blant 3MY-elevene, mens guttene gjør det signifikant bedre blant 3MX-elevene. I derivasjon er guttene blant 3MX-elevene signifikant bedre enn jentene, mens det er ingen signifikant kjønnsforskjell blant 3MY-elevene i dette temaet (Angell m.fl. 1999 s 169). Som en kuriositet kan det nevne at ”3MX-elevene er klart bedre enn samtlige land når det gjelder statistikk” (Angell m.fl. 1999 s 166). Om resultatet i matematikk for de tre populasjonene i 1995 for et utvalg land der minst 60 % av årskullet er representert velges ut, så blir resultatet figur 4.6. Figuren viser ikke utviklingen i matematikkprestasjoner for én elev, eller én elevgruppe over tid, men gir snarere en indikasjon på prestasjonen i de ulike gruppene i et land i forhold til de tilsvarende gruppene i de andre landene.



Figur 4.6 Matematikkprestasjoner for alle populasjonene i TIMSS 1995. Populasjon 1 og 2 er splittet på øvre og nedre klassetrinn hhv (Angell m.fl. 1999 s 34)

Figur 4.6 viser at norske elever presterer betydelig dårligere enn det internasjonale snittet i matematikk i populasjon 1. Videre er resultatet i populasjon 2 også godt under internasjonalt snitt. På slutten av videregående er prestasjonene derimot betydelig bedre. Noe av grunnen til denne framgangen kan nok være at norske elever på videregående er forholdsvis gamle i forhold til elevene i andre land (Angell m.fl. 1999 s 28). Strukturen på prestasjonene er lik for naturfagresultatene (Angell m.fl. 1999 s 35). Videre var det klare kjønnsforskjeller i TIMSS 1995, guttene gjorde det signifikant bedre enn jentene i alle tre populasjonene, forskjellen var til tider stor, se figur 4.7.



Figur 4.7 Kjønnsforskjeller fra populasjon 1 til 3 i TIMSS 1995. Poengdifferanse i guttenes favør (Angell m.fl. 1999 s 41)

Figur 4.7 viser at kjønnsforskjellen i populasjon 1 er noe større i matematikk enn internasjonalt, mens kjønnsforskjellen er noe under internasjonalt for populasjon 2. For populasjon 3 er kjønnsforskjellen mye større i Norge enn internasjonalt. Igjen er strukturen tilsvarende for naturfag (Angell m.fl. 1999 s 41). Kjønnsforskjellen var signifikant med 95 % konfidensintervall for alle studieretningene, med unntak av håndverk og industri. Mangelen på signifikans i denne studieretningen skyldes i stor grad at for denne studieretningen var det bare 21 jenter i forhold til 201 gutter, se Angell m.fl. 1999 s 40. En gjennomgang av oppgavene fra populasjon 3 i TIMSS 1995 over hvilke oppgaver som guttene gjorde det betydelig bedre enn jentene finnes i Angell m.fl. 1999 s 47.

5. Didaktisk teori

5.1 Kompetansebegrepet

Før vi ser på hvordan kompetanse kan utarte seg i matematikk, og forhåpentligvis utvikles; så må vi stoppe opp med kompetansebegrepet. Hva mener vi egentlig med kompetanse, og hva er matematikk? Et søk i bokmålsordboka gir oss følgende to betydninger av ordet kompetanse (http://www.dokpro.uio.no/ordboksoek.html):

1: kvalifikasjon, dyktighet til noe: få k- til å undervise i den videregående skolen / realk-, studiek-, undervisningsk-

2: myndighetsområde for en stilling: ligge utenfor ens k-

Det er den første betydningen av ordet som vi bruker i denne sammenhengen. Vi ønsker å se på den kompetanse elevene har opparbeidet seg i matematikk, og hvordan så denne kan utvikles. Men hva er så matematikk?

5.2 Hva er matematikk?

Den tidligste matematikken vi kan tenke oss kan defineres forholdsvis presist. ”The simplest mathematical idea-and one that probably existed even before civilization-is that of counting, in words and in more permanent form as written symbols” (Katz 1998 s 4). I Egypt og Mesopotamia hadde man ca 1700 f.kr utviklet matematikk for brøker, sirkelmål, lineære ligninger, sol/måne- kalendere, pyramidemål, pytagoreiske tripler, kvadratrøtter og kubikkrøtter for å nevne noe (Katz 1998 s 45). Vi biter oss merke i at denne tidlige matematikken er for det meste framsatt som algoritmer i de kildene som er bevart. For å finne svaret på et gitt problem, så gjør du så og så, og dermed har du svaret, nærmest som i en kokebok. I de kildene som har overlevd til moderne tid er det ”little concern…as to how the algorithm was discovered, why it works, or what its limitations are” (Katz 1998 s 8). Den matematiske eliten forstod nok forutsetningene og begrensningene til metodene sine, og sannsynligvis hvordan denne matematikken var blitt til, men om dette er kildene tause. Likevel viser de få kildene vi har om egyptisk matematikk (Moskva-papyrusen og Rhind-papyrusen) at ”egyptisk matematikk ikke var en samling enkeltresultater, men en systematisk lærebygning med regler og metoder” (Lindstrøm 1995 s 46). Den greske matematikk var nok mer opptatt av teori enn den mer algoritmiske matematikken fra Egypt og Babylon. Den greske matematikken ble etter hvert opptatt av å utvikle en matematikk basert på få aksiomer og definisjoner og bruke logiske slutningsregler til å finne resultater som kunne avledes med minst mulig forutsetninger. Mye av æren for dette har i første rekke særlig blitt tilskrevet Euklids geometriske system, slik vi finner det i hans Elementer, se Heath 1956. En slik aksiomatisk oppbygning av matematikk (og naturvitenskapelig kunnskap) ved hjelp av bevisføring, har med opphav i den greske tradisjonen blitt forbilde og rettesnor for slike framstillinger i all ettertid: ”was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden” (Richard Dedekind i Lindstrøm 1995 s 80).

Devlin hevder at ”the answer to the question ’what is mathematics?’ has changed several times during the course of history. Up to 500 B.C or thereabouts, mathematics was indeed the study of numbers.” (Devlin 1998 s 1). Dette synet støttes også i stor grad av Katz (Katz 1998 s 8). Etter hvert som vi nærmer oss moderne tid, så blir matematikk mer og mer omfattende, og lar seg vanskelig beskrive på en enkel måte. Courant og Robbins klassiske verk ”what is mathematics?” svarer på mange måter ikke på spørsmålet, men begir seg ut på en studie av ulike matematiske emner. Riktignok har de en kort innledning på fire sider om hva matematikk er. ”Mathematics as an expression of the human mind reflects the active will, the contemplative reason, and the desire for aesthetic perfection” (Courant & Robbins 1996 s xxiii). Siden matematisk forskning stadig har blitt mer omfattende og mangfoldig, så kan det være vanskelig å finne en samlebetegnelse for faget. Det er bare i løpet av de siste tretti årene at en definisjon har blitt til som de fleste matematikere kan enes om: matematikk er ’the science of patterns’. Matematikere studerer abstrakte mønstre, sammenhenger og strukturer. Disse kan være ”numerical patterns, patterns of shape, patterns of motion, patterns of behavior, voting patterns in a population, patterns of repeating chance events and so on" (Devlin 1998 s 3). For ethvert mønster, struktur eller sammenheng, gjerne abstrakt (!), så defineres aktiviteten forbundet med studie av dette som matematikk. Vi må her skyte inn at matematikk fremfor alt er en kumulativ vitenskap. Algebra bygger på aritmetikk. Geometri bygger på aritmetikk og algebra. Calculus bygger på både aritmetikk, algebra og geometri. Topologi er et utskudd av geometri, mengdelære og algebra. Differensialligninger bygger på calculus, topologi og algebra (Davis & Hersh 1988 s 18). Matematikk kan derfor beskrives som et stort tre med røtter, stamme, grener og kvister. Treet vokser med tiden, og det skytes stadig friske skudd. Stadig nye felt utvikles og det sier vel seg selv at intet menneske er i stand til å ha oversikt over alt som faller inn under matematikk.

5.3 Utvikling av matematisk kompetanse

Ønsket er at elevene utvikler en slik kompetanse over tid. Fra barnsben av må det skje en stor utvikling for at elevene skal ha en forutsetning for å lykkes med matematikken i videregående skole.

5.3.1 Det første møte med matematikken

Av erfaring vet vi at barn veldig tidlig lærer seg å telle. Det er vel ikke så mye som tyder på at telling er en medfødt egenskap hos små barn. Men man lærer det tidlig, de fleste av oss husker kanskje ikke hvordan vi selv fra små barnsben møtte tellealgoritmen, men det er ofte i sammenheng med å lære hvor mange fingrer man skal holde opp hver gang noen voksne spør hvor gammel man er. Etter hvert vil den håpefulle klare å se en link mellom antall fingrer, som symboliserer alder. Etter en tid har man ingen problem med å akseptere at antall fingrer øker fra år til år. Da er det jo en lettelse at ingen spør når man ble født, for så å forlange at barnet strekker ut riktig antall fingrer! På dette stadiet i utviklingen er 'tallene' ganske enkelt telletallene, mengden av den av de naturlige tall. Negative tall forekommer ikke, og i stor utstrekning vil nok tallene være avgrenset til heltallene 1-10. Noe annet vi registrerer hos små barn er når vi ber dem telle hvor mange fingre de har, så starter de å telle: ”1-2-3-4-5” (la oss si vi bare er interessert i bare én hånd.) Bra, sier vi, så hvor mange fingrer har du på en hånd? Svaret lyder da ofte: ”1-2-3-4-5”. (se for eksempel Piaget 1952 s 62). Det kan være farlig å trekke for raske konklusjoner, men man kan lett få inntrykk av at små barn ikke ser på tall som et objekt, mens som en prosess (se også kap 5.3.5): ”…the child would just repeat the procedure of counting. This phenomenon clearly shows the operational roots of natural numbers…” (Sfard 1991 s11). Vi merker oss også at tallene stadig referer til noe konkret. Ofte er det alder eller gjenstander som blir fysisk representert (epler, kaker, personer, osv). Men siden metoden er helt lik, så kan vi få barn til å gjøre samme prosedyre uten at det er noen konkret gjenstand innblandet. Man kan da lure på om barnet egentlig kanskje bare har lært seg en regle av ord, som ikke nødvendigvis har noe med å tallfeste en gruppe objekter å gjøre. Rimelig tidlig i ett barns utvikling er det likevel ingen tvil om at barnet har fått en god tallforståelse:

> At the age of five or less, the typical child in an educated, Western culture makes a cognitive leap that took humankind many thousands of years to achieve: the child acquires the concept of number. He or she comes to realize that there is something common to a collection of, say, five apples, five oranges, five children, five cookies, a rock group of five members, and so on. That common something, ‘fiveness’, is somehow captured or encapsulated by the number five, an abstract entity that the child will never see, hear, feel, smell, or taste, but which will have a definite existence for the rest of his or here live (Devlin 1998 s14).

Av matematiske operasjoner er addisjon noe man behersker tidlig, selv om man kan spørre seg om små barn egentlig adderer, eller om de først organiserer alt i en gruppe, og så teller opp alle elementene i gruppen. Enkelte studier kan tyde på dette, selv om denne studien var av barn i 2. klasse, og oppgaven var å addere 9 tre ganger (Cobb m.fl. 1992 s 104). Videre er det gode grunner til å tro at divisjon er noen man utvikler forståelse for veldig tidlig. Dette er gjerne sett i sammenheng med barnas rettferdighetssans. Om vi har 6 sjokoladebiter og to barn, så vil begge barna raskt se hvordan dette kan deles mellom dem mest rettferdig. Erfaringer fra klasserom kan tyde på at subtraksjon og multiplikasjonsforståelse også blir utviklet veldig tidlig, muligens noe senere enn addisjon og divisjon. Subtraksjon kan jo av og til føre til at svaret blir negativt. På lignende måte som for tall kan man tidlig se gjennom leker at barn også har gode evner til å gjenkjenne geometriske figurer og kategorisere dem. Det finnes leker der oppgaven består i å putte ulike geometriske figurer inn en dør, og det er bare en slik dør som passer til hver figurtype. En slik aktivitet vil raskt trene opp barnets geometriske evner og vi ser at små barn raskt utvikler stor innsikt i hvilke figurer som passer hvor.

5.3.2 Matematisk forståelse, et 'faux amis'

Begrepet forståelse trenger klargjøring. Hva menes egentlig med forståelse? Vi vet av erfaring at vi kan utvikle kompetanse innenfor et felt uten egentlig å ha en fullgod forståelse. Mange operasjoner vi gjør i dagliglivet og i jobbsammenheng er rutinepreget. Vi gjør noe, vi vet av erfaring at dette fungerer, men vi har egentlig ikke noen forståelse for hva vi gjør, og hvorfor dette virker. En datamaskin, oppvaskmaskin, TV-apparat eller mikrobølgeovn er gode eksempler på slike gjenstander de fleste bruker i det daglige, men knapt forstår hvordan de fungerer. Slik er det også med matematikk, man kan lære seg algoritmer slik som i de eldste kulturene (se kap 5.2), man gjennomfører prosedyrene og oppnår riktig resultat. Men har man en forståelse for hva som har skjedd? Har man mulighet til å vurdere gyldigheten av resultatet, hva prosedyren forutsetter? Hvor mange elever og lærere er det egentlig som forstår produktregelen, brøkregelen eller kjerneregelen? 'Faux amis' (fr: falske venner) beskriver et ordpar eller to bokstaver som interspråklig eller intraspråklig er og /eller høres like ut, men der betydningen er høyst forskjellig[4]. I matematikkdidaktikk kan ordet "forståelse" oppfattes som et faux amis. Én elevs

[4] Eks1: bekommen (tysk) & become (engelsk). Har du hørt om tyskeren som var på engelsk restaurant? Han satt og tenkte med seg selv hva han skulle bestille, før han bestemte seg: "Ah, natürlich, ich würde gern ein Beefsteak bekommen!" Han henvente seg til kelneren og sa: "I want to become a beefsteak". Eks2: de tre 'bønner' på norsk: de vi spiser, de som jobber på gård, og de man framsier i gudstjenesten.

forståelse, trenger slett ikke sammenfalle med en annen elevs forståelse, eller lærerens forståelse for den del. Stig Mellin-Olsen innførte begrepene 'instrumentell forståelse' og 'relasjonell forståelse' for en distinksjon:

> Instrumentalism produces instrumental understanding, which is opposed to relational understanding, as the former usually is related to the practical use of the knowledge rather than some deeper structure. In mathematics education we would usually associate 'relational understanding' with 'mathematical understanding' (Mellin-Olsen 1981 s 351).

Med dette mener Mellin-Olson (og også Skemp) at instrumentell forståelse betyr at man har lært seg metoder og algoritmer som man bruker i de situasjonene der dette passer seg, men man har liten eller ingen dypere formening hvorfor dette er riktig. I matematisk forstand er det egentlig ingen forståelse, Skemp bruker begrepet "rules without reasons" (Skemp 1987 s 153) om en instrumentell forståelse. Ironisk nok er det en slik forståelse man ofte trakter etter i skolematematikken, også i kurs for ekspertene i videregående skole. Så lenge man klarer å løse oppgavene, gjerne ved å se på eksempler i boken eller tips fra lærer, og om svaret stemmer overens med fasitsvaret bak i læreboken, ja så går man videre til neste problem. En gjennomgang av oppgavene i læreboken vil mest sannsynlig avdekke at flertallet av oppgavene er av en slik karakter. Ved innføringen av moderne matematikk i skolen på 1960 og 70-tallet (Gjone 2006 s 4) var intensjonen at den instrumentelle forståelsen skulle i større grad vike plassen for relasjonell forståelse, og studier kan tyde på at dette også ble effekten (Mellin-Olsen s 352). En slik overgang var ønsket fordi en sann matematisk forståelse er mye mer anvendbar enn instrumentell forståelse, også i andre fag, og dessuten virker faget i seg selv mer spennende enn om man bare skulle pugge regler hele tiden. Tradisjonell undervisning har i stor grad vært preget av pugg, noe satiren til Kielland er eksempel på, se kap 1. Vi må riktignok være klar over at instrumentell forståelse har sine fordeler, og ikke minst har den stor verdi. Slik forståelse er mye raskere å tilegne seg, man trenger bare å pugge litt, så er jobben gjort. Man oppnår raskt en mestringsfølelse, og store deler av pensum kan nesten med fordel læres på denne måten rent tidsmessig, men også av andre grunner. For å forstå et resonnement eller et bevis, må man være moden for dette, da kan det ofte lønne seg å starte med å presentere spesielle og forenklede tilfeller før det generelle og eksempler før bevis og en stringent framstilling. Man kan nesten ikke undervurdere hvor mye mestringsfølelse har for videre arbeid med et fag. Dessuten er en slik tilnærming mindre krevende både for læreren og elevene. Man slipper jo å bevise eller på andre måter argumentere for de resultatene man skal kjenne til. Om elevene stoler på boken og læreren, så er mye tid spart. Dessuten, for å drive undervising som legger opp til relasjonell forståelse, stilles det mye større krav til lærerens matematiske kompetanse. I oppgavene som elevene skal løse i denne undersøkelsen er det noen av oppgavene som tester om elevene har hovedsakelig instrumentell forståelse, for eksempel å se om elevene behersker derivasjonsregler for ulike typer funksjoner og sammensatte utrykk. Legg for eksempel merke til at "determining derivatives of polynomial functions", hører til under knowing domain (kap 9.2). I andre oppgaver er det imidlertid ikke nok med en slik forståelse, man trenger også å være kreativ og se nye sammenhenger, her kommer den relasjonelle forståelsen inn, og oppgavene hører hjemme i applying og reasoning domanin (kap 9.2).

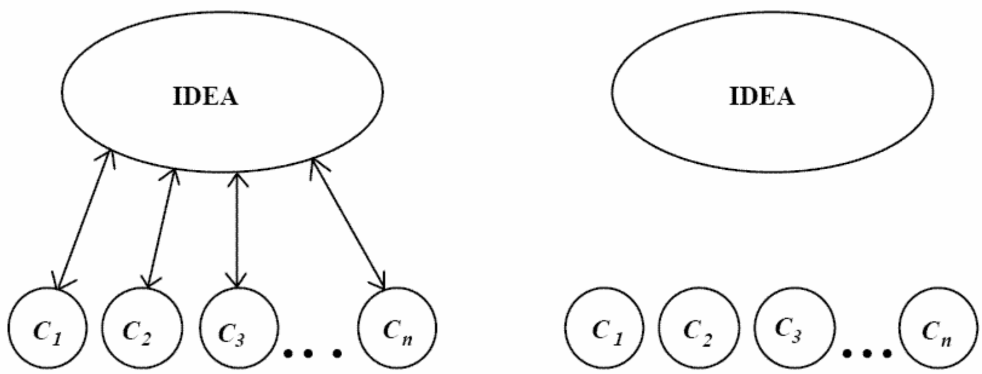
5.3.3 Framvekst av matematisk forståelse

Pirie og Kieren har utviklet en modell for framvekst av matematisk forståelse, se Pirie & Kieren 1994. I deres modell er det "eight potential levels or distinct modes within the growth of understanding for a specific person, on any specific topic" (Pirie & Kieren 1994 s 170). I deres modell har forståelse sitt utspring i 'prmitive knowing', med dette mener de ikke forståelse av lav matematisk vanskelighetsgrad, men snarere utgangspunktet for videre forståelse innenfor et gitt matematisk tema. Vi har allerede hevdet at calculus bygger på aritmetikk, algebra og geometri (kap 5.2), så i denne sammenhengen vil disse utgjøre elevens 'primitive knowing'. Som lærer eller forsker kan man ikke a priori vite at elevenes primetive knowing er tilstrekkelig og uten missoppfatninger, dette kan man få mer innsikt i med diagnostiske tester eller intervju for eksempel. De videre nivåene i Pirie og Kierens modell er: Image making, image having, property noticing, formalising, observing, structuring og inventising. (Pirie &

Kieren 1994 s 170). Artikkelen er veldig omfattende, og tar opp mange viktige sider av modellen, men i denne sammenhengen vil jeg spesielt dra fram begrepet 'folding back'. Med dette mener vi den aktiviteten som er helt essensiell for en framvekst av matematisk forståelse. "when faced with a problem or question at any level, which is not immediately solvable, one needs to fold back to an inner level in order to extend one's current inadequate understanding" (Pirie & Kieren 1994 s 173). I en slik prosess vil man returnere til innenforliggende nivåer, og disse indre nivåene vil nå bli påvirket og forandret av den forståelsen man har opparbeidet seg i de ytre nivåene. Etter en liten runddans i de indre nivåene, vil man ha opparbeidet seg en dypere forståelse når man returnerer til de ytterforliggende nivåene. "This inner level action is part of a recursive reconstruction of knowledge, necessary to further build outer level knowing" (Pirie & Kieren 1994 s 173).

5.3.4 Læring ved abstraksjon

En abstraksjon kan vi beskrive som en mange-til-en-funksjon hvor ulike eksempler og sammenhenger generaliseres, og blir satt sammen til en forestilling. Dreyfus (1991 s 35-37) beskriver en slik prosess med en trepunktsfremstilling: generalisering → syntese → abstraksjon. Begrepene som dannes i en slik prosessen kalles abstrakt-generelle. Hele ideen er at de ulike eksemplene blir knyttet sammen i en ny sammenheng og dermed blir forståelsen løftet opp på et høyere abstraksjonsnivå. Isolerte begreper som blir forklart fra sin sammenheng, kalles abstrakt-atskilte. Disse begrepene dannes i større grad gjennom en definisjon, enn gjennom en abstraksjon (White & Mitchelmore 2002 s. 239).



Figur 5.*1 White og Mitchelmores illustrasjon av begrepene abstrakt-generell ide (venstre) og abstrakt-atskilt ide (høyre)* (White & Mitchelmore 2002 s. 240)

I denne sammenhengen er det naturlig å bruke figur 5.1 for å forstå hvordan derivasjon kan læres. Da vil de ulike c_i -ene i en abstrakt-generell ide representere for eksempel tall, variabel, stigningstall, tangenter, grenseverdibegrepet, algebraiske operasjoner osv. I en abstrakt-atskilt ide er det ingen slik link mellom en ide og de bakenforliggende matematiske elementene som ideen bygger på. White & Mitchelmore gjennomførte en studie og fant at i derivasjon var løsningsprosenten stor i enkle rutineoppgaver, mens i mer sammensatte tekstoppgaver var løsningsprosenten mye lavere. Nedgangen var fra over 60 % til 15 %, altså betydelig. Det viste seg videre at de elevene som klarte å løse de sammensatte oppgavene hadde en abstrakt-generell oppfattelse av derivasjon, mens de som hadde problemer med de sammensatte oppgavene i større grad hadde en abstrakt-atskilt forståelse. Derimot klarte begge gruppene i stor grad å løse rutineoppgavene.

I TIMSS Advanced vil det derfor forventes at det vil være flere elever som klarer å løse rutineoppgaver (gjerne flervalgsoppgaver) mens færre elever vil klare å løse de mer sammensatte tekstoppgaver, dette vil ofte være de åpne oppgavene. En slik forskjell i svarfordelingene mellom flervalgsoppgaver og de åpne oppgavene har blitt dokumentert i TIMSS 1995, og dette vil også prege resultatene fra 2007 (kap 7.3).

5.3.5 Prosess-objekt dualiteten

Spenningen mellom prosess og objekt vil også være krevende for veldig mange elever. ”For example, many students conceive …an equation as signifying a prompt/request to perform certain operations, without holding any conception of an equation as such distinct from the operations to be performed.” (Niss 1999 s 17). Sfard viser at veldig mange matematiske sammenhenger kan defineres som en prosess eller som et objekt, en sirkel kan for eksempel defineres som mengden av alle punkt i et plan som ligger i avstand R fra et gitt punkt P. Dette er hva hun kaller en strukturell definisjon, til forskjell fra en operasjonell definisjon som er plankurven man får ved å snurre en passer rundt et gitt punkt med fast utslag på passeren. (Sfard

1991 s 5). Disse beskrivelsene av en sirkel er faktisk komplementære. I noen sammenhenger er det nyttig å bruke det strukturelle perspektivet (objektet), mens i andre sammenhenger er det mer naturlig å bruke det operasjonelle perspektivet (prosessen). Å tegne en rett linje i et koordinatsystem ved en operasjonell prosess vil være noe tidkrevende, ideelt sett på man da beregne en hel rekke y-verdier ved hjelp av funksjonsutrykket, og plotte så alle de par av (x_i, y_i) man da har funnet. Dette vil da gi en rett linje. En strukturell tilnærming vil være å gjenkjenne at en rett linje er, vel rett, så da er den entydig bestemt av bare to punkt. Ved å velge to tilfeldige x-verdier kan man så finne de tilhørende y-verdiene, og linjen kan da tegnes med like stor nøyaktighet som for den operasjonelle prosessen (forutsatt at de to punktene ikke ligger for nærme hverandre). Dette eksemplet tjener kanskje ikke til å illustrere den store styrken ved å se strukturen til matematiske objekter. Et mer interessant eksempel er derfor tatt med (bearbeidet fra Sfard 1991 s 25).

Definisjon: en Promenade er gitt ved $P = \{1 \le n \le 25 | n \in N\}$ samt følgende funksjoner:

$$A = \{x + 5 | x \in P, x \le 20\}$$
$$B = \{x - 5 | x \in P, x > 5\}$$
$$C = \{x + 1 | x \in P, x \bmod 5 \ne 0\}$$
$$D = \{x - 1 | x \in P, x \bmod 5 \ne 1\}$$

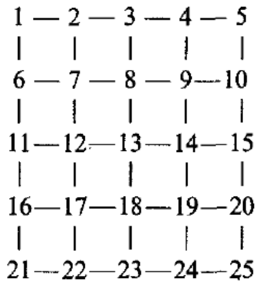
Enhver kombinasjon av A, B, C, D kalles et Stroll. Vi sier at et Stroll s går fra a til $b \iff s(a) = b$. Dermed vil $A^2 \circ D^3 \circ A$ være et Stroll som går fra 5 til 17, siden

$$A^2 \circ D^3 \circ A(5) = A^2 \circ D^3(10) = A^2 \circ D^2(9) = A^2 \circ D(8) = A^2(7) = A(12) = 17$$

Sfard gir leseren følgende oppgaver:

1. Gi et eksempel på et Stroll som går fra 11 til 3.
2. Finn alle tall som kan nåes ved et Stroll fra 9 uten bruk av B og D.
3. Uten å se på svaret du gav på spørsmål 1, finn et annet Stroll fra 11 til 3.

Det er allerede klart at ”fulfilling the first two requirements…can be a rather touch job…and the third question is not at all as straightforward as it looked” (Sfard 1991 s 24). En operasjonell tilnærming til disse oppgavene vil være en betydelig matematisk utfordring (prøv!). Derimot blir alt mye enklere om man ser de strukturene som de matematiske objektene A, B, C, D og P har. Figur 5.2 viser en naturlig måte å framstille P, dermed er det klart at de fire funksjonene ikke er annet enn å bevege seg opp-ned og høyre-venstre i figuren. De tre oppgavene blir betydelig forenklet og vil raskt la seg løse.

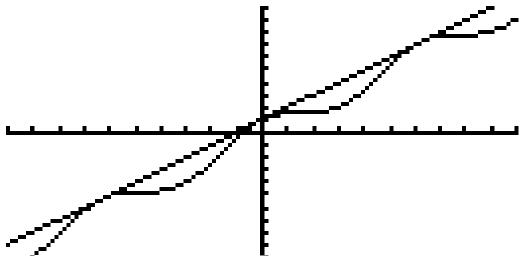


Figur 5.2 En geometrisk representasjon av mengden P (Sfard 1991 s 27)

Tankegangen i dette eksempelet vil kunne anvendes til flere av problemene innenfor derivasjon som elevene møter. Har man utelukkende en operasjonell forståelse av derivasjon, så kan oppgavene bli den reneste ørkenvandring for å finne svaret, mens en forståelse av objektets struktur vil ofte føre til betydelige forenklinger, "while tackling a genuinely complex problem, we do not always get far if we start with concrete operations; more often than not it would be better to turn first to the structural version of our concepts." (Sfard 1991 s 27).

5.3.6 Tangenter og grenseverdi

Det er ikke unaturlig å tenke seg at de fleste elevene har møtt tangenter før, særlig i sammenheng med tangenter til sirkler i geometriske oppgaver. Tangenter treffer et annet objekt i bare et punkt, i alle fall er kanskje dette inntrykket elever i noen grad sitter igjen med etter møtet med sirkelen og dens tangenter fra opplæring innen plangeometri. En formell definisjon har nok ikke elevene møtt, dette presiseres særlig i møte med derivasjon. Det vil da også vise seg at tangenter fint kan treffe en kurve i flere punkt, figur 5.3 illustrerer dette.



Figur 5.3 $Y_1 = x + 1$ *er tangent til funksjonen* $Y_2 = \cos x + x$ *i uendelig mange punkt*

Grenseverdier blir nyttiggjort når vi går fra en gjennomsnittelig vekst til en momentanvekst. Momentan vekst er stigningstallet til en kurve i ett punkt, altså den deriverte i dette punktet.

5.3.7 Derivasjon

Den deriverte defineres ofte ved hjelp av en grenseverdibegrepet:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$ (Utdanningsdirektoratet 2001 s 12)

En slik måte å definere den deriverte på kan føre til en del utfordringer for elevene, siden det ser ut til at man må dele på null. Dessuten innfører definisjonen en del nye begreper: $'$, $\lim$, $\Delta x \to 0$ og $f(x + \Delta x)$. Legg merke til at dette er to måter å definere den deriverte på, den til høyre benytter seg av en liten tilvekst h, og man bruker ikke Δx -notasjon. Dette kan være gunstig, av egen erfaring har jeg sett at en del elever tror Δx er en multiplikasjonsoppgave mellom Δ og x, og ser ikke på Δx som et objekt. Personlig er jeg veldig svak for Δx -notasjon, og vil derfor ikke bruke h som infinitesimal i min gjennomgang av de utvalgte oppgavene i kap 7.2.

I TIMSS advanced 2008 assessement frameworks (Garden m.fl. 2006 s 14), er det listet opp hvilke ferdigheter man forventer at elevene behersker innenfor calculus:

1. Evaluate limits of functions, including rational functions. Know the conditions for continuity and differentiability of functions.

2. Differentiate polynomial, exponential, logarithmic, trigonometric, rational, radical, composite, and parametric functions. Differentiate products and quotients.

3. Use derivatives to solve problems (e.g., in kinematics, optimization, and rates of change).

4. Use first and second derivatives to determine gradient, turning points, and points of inflection of polynomial and rational functions, and sketch and interpret graphs of functions.

5. Integrate polynomial, exponential, trigonometric, and rational functions. Evaluate definite integrals, and apply integration to compute the area under a curve.

Fokus innen derivasjon fremgår av følgende formulering som står i sammenheng med denne listen: "the focus is on understanding limits and finding the limit of a function, differentiation and integration of a range of functions, and using these skills in solving problems." (Garden m.fl. 2006 s 14). Ved å sammenligne med den norske læreplanen, så ser vi at disse fem målene sammenfaller brukbart (kap 4.2.3). Legg merke til at siden grenseverdier ikke er skikkelig behandlet i norske lærebøker, så har nok norske elever dårlig forutsetning for å ha et godt grensebegrep, samt å finne grensen til funksjoner (se kap 7.2.1). Flere av disse målene er pensum i 2MX og ikke i 3MX, se kap 9.1. Dette kan nok medføre at flere av elevene har glemt deler av de teknikkene de lærte i 2MX. Det er derfor grunn til å tro at mye av derivasjonshåndverket[5] nok ikke sitter på fingerspissene. Dette var et av funnene til Leiren & Ludvigsen, noen oppgaver hadde størst løsningsfrekvens blant 2MX elevene.

Rasjonale funksjoner i et reelle tilfellet er funksjoner på formen $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ der $P(x), Q(x)$ er polynomfunksjoner og $Q(x)$ ikke er nullpolynomet. I noen tilfeller må da elevene finne grenseverdien til et $"0/0"$ utrykk, og pilotstudien er det to slike oppgaver. I lærebøkene er det derimot ikke så mange oppgaver av denne typen.

I min studie har jeg valgt å begrense meg til å undersøke derivasjonsoppgaver, og tar altså ikke med oppgaver innen integrasjon. Dermed bortfaller det femte punktet på listen over. I flere av oppgavene vil det vise seg at man har behov for gode ferdigheter innen algebra for å kunne finne løsningen, og i andre tilfeller trenger man et geometrisk argument for å finne svaret. Jeg har likevel valgt å ta med noen slike

[5] "Derivasjon er et håndtverk, integrasjon er en kunst!" Viggo Brun i Lindstrøm 1995 s 383.

oppgaver, siden jeg mener de hører naturlig inn under temaet calculus. Den algebraen og geometrien vi trenger, velger jeg å betrakte som hjelpemidler for å løse oppgavene. Matematikk er jo ikke atskilt i ulike båser, men vi vil alltid ha en glidende overgang mellom ulike deler av faget. Derivasjon er både omfattende og sentralt i matematikkfaget for spesialistene i videregående skole. For å få full forståelse av derivasjon, må man beherske ulike deler av matematikken, for eksempel: forholdstall, stigningstall, funksjoner, grenseverdier og kontinuitet. Dessuten er noe geometri, og algebraiske manipulasjoner også noe elevene må beherske for å kunne løse flere calculus-oppgaver. Personlig synes jeg dette er noe av det som gjør derivasjon så spennende siden man må nyttiggjøre seg av ulike matematiske teknikker.

5.3.8 Om notasjon

I oppgavene er det flere ulike typer notasjon som vil være hensiktsmessig å kjenne til. Utrykk på formen: $f'(x)$, $(f(x))'$, $\frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx}, \frac{dy}{dx}, \frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\delta y}{\delta x}, \frac{\partial y}{\partial x}, D(f(x))$ og kanskje også $\dot{x}$ og ∇ er skrivemåter som elevene nok i større eller mindre grad har møtt i sin matematikkopplæring. Noen av disse skrivemåtene er mer i bruk enn andre, og det fins ulike kulturer for bruk av notasjon. Notasjon med primtegnet går tilbake til Lagrange, mens forholdstall mellom forandring i x- og y-retning går tilbake til Leibniz. Dott-notasjonen går tilbake til Newton, og er noe brukt i fysikksammenheng, mens derivasjonsoperatoren er en notasjon som Euler utviklet. På en måte er det bra at både læreverk og lærere veksler mellom de ulike notasjonene slik at elevene blir vant med dem, men det nok også grunn til å tro at dette mylder av ulike notasjoner kan være forvirrende for elever. Elevene blir også utsatt for et veldig stort og nytt begrepsapparat. Sekant, tangent, stigningstall, grenseverdi, går mot, øker og minker, deriverbarhet, den deriverte, fortegnet til den deriverte, topp- og bunn-punkt, vekstrater, infinitesimale størrelser, vendepunkt, produkt- , brøk- og kjerne-regelen, elastiteter, akserelasjon, høyere ordens deriverte osv. Alle disse utrykkene og flere til må elevene lære seg og beherske, og dette er i stor grad en ukjent verden for mange, og et abstraksjonsnivå og presisjonsnivå som kan være krevende.

6. Metode

Mye kan sies om utviklingen av oppgaver, utvikling av koder, metoder for retting osv, men det vil gå langt utover fokuset for denne oppgaven å gå inn i dette feltet slik disse spørsmålene fortjener. Denne fremstillingen er derfor bare en kort innføring, en videre innføring fins i de nasjonale og internasjonale TIMSS-rapportene.

6.1 Oppgavene

I store spørreundersøkelser er det vanlig å bruke både flervalgsoppgaver og åpne oppgaver. I flervalgsoppgavene skal elevene krysse av for det de tror er det riktige alternativet. I pilotundersøkelsen er det utelukkende 4 svaralternativer, mens det i hovedundersøkelsen finns oppgaver med både 4 og 5 svaralternativer. Det finns også noen kortsvarsoppgaver uten svaralternativer, man må svare med ett eller noen få tall (Leiren & Ludvigsen 2005 s 21). I TIMSS Advanced 1995 var det 5 svaralternativer på flervalgsoppgavene, og derfor er det problematisk å sammenligne resultatene på flervalgsoppgavene fra studien i 1998 og 2005 siden disse har en ekstraktor mer enn i pilotundersøkelsen. Vi må da forvente at på oppgavene som sammenlignes, så vil en lavere prosentandel svare riktig, fordi elevene vil fordele seg på 5 svaralternativer i stedet for 4. Det er en stor fordel med flervalgsoppgaver ved retting, siden det går veldig raskt å få oversikt over elevenes besvarelser. Bruken av flervalgsoppgaver gir mulighet for å ha med mange flere oppgaver, noe som vil gi høyere reliabilitet, og dessuten kan et bredere spekter av faglige emner dekkes (Angell m.fl. 1999 s 13). I de åpne oppgavene må elevene selv skrive ned en utregning, eller en begrunnelse for hva de mener er riktig. Figurer og lignende kan godt forekomme. De åpne oppgavene er det naturligvis mer omfattende å rette, men disse har den fordel at elevene ikke kan gjette eller eliminere bort gale svaralternativer, men må vise hvordan de løser oppgaven.

Det er en lang prosess å komme frem til gode oppgaver. Mange forslag blir laget av de som er med i studien, og ideer blir nok også hentet fra lærebøker og lignende.

Oppgaver fra tidligere undersøkelser har blitt brukt, og nasjonale sentre har sent inn oppgaver. Etter hvert har det blitt dannet en oppgavebank, der alle oppgavene er kategorisert etter retningslinjene i TIMSS framework (Angell m.fl. 1999 s 13). Til selve undersøkelsene blir oppgaver bevist valgt ut etter gitte kriterier, og det blir foretatt en generalprøve/pilotstudie i forkant av selve studien for å sjekke om det er noen missforståelser eller uklarheter i oppgavene.

Leiren & Ludvigsen valgte ut alle de tolv derivasjonsoppgavene som var med i TIMSS-undersøkelsen i 1998, dette ble gjort for å lettere kunne sammenligne med resultatene fra TIMSS 1998, samt at dette var tidsbesparende siden disse oppgavene allerede var blitt testet ut og kvalitetssikret (Leiren & Ludvigsen 2005 s 20). Noen av oppgavene de plukket ut dreier seg egentlig om å finne grenseverdien til en funksjon, så strengt tatt er ikke dette rene derivasjonsoppgaver, men tematisk henger jo grenseverdibegrepet veldig naturlig sammen med derivasjon (se også kap 5.3.7), så at grenseverdioppgaver er med kan forsvares. Tilsvarende har de med en oppgave om stigningstall som egentlig hører til under geometri, men de valgte å ta med denne ”da forståelse av stigningstall er fundamentalt i derivasjonslæren” (Leiren & Ludvigsen 2005 s 69). For å kunne lette min sammenligning, så har jeg plukket ut de oppgavene fra pilotstudien som ligner både tematisk og regneteknisk på oppgavene fra Leiren & Ludvigsens studie. Det var ikke alltid at dette var mulig, for eksempel fins det i pilotundersøkelsen ingen grenseproblemer av typen $"\infty/\infty"$. I tillegg har jeg plukket ut noen andre oppgaver fra pilotundersøkelsen som ikke ligner på noen av oppgavene til Leiren & Ludvigsen, men som likevel fortjener å bli presentert.

Selve rettearbeidet av pilotstudien er en omfattende prosess, der hver eneste elevbesvarelse blir rettet av flere personer slik at man minker sjansen for at feil kode blir brukt. Våren 2007 var jeg på besøk hos ILS noen dager for å få innblikk i denne retteprosessen, og etter at alle besvarelsene har blitt rettet, blir resultatene av kodingen digitalisert. Det er dette som danner det empiriske grunnlaget for dette studiet.

6.2 Feilkoder for de åpne oppgavene

Fremstilligen i dette kapittelet er basert på TIMSS Advanced 2008 Field Test-Scoring Guides for construced-response items (2007), og vil i det følgende bli omtalt som 'scoringguide'.

I et scoringssystem for de åpne oppgavene må man skille mellom riktige og gale svar, men vi kan få mer informasjon ut av elevens besvarelser om vi klarer å sortere svarene i ulike kategorier. Om vi ønsker å få vite mer om hvordan elevene resonnerer matematisk, hvilke løsningsstrategier som blir brukt og hvilke forestilinger elevene har, så trenger vi et system som grupperer ulike typer svar (Angell m.fl. 1999 s 14). ”Student's answers can provide insights into what they know and are able to do, including common misconceptions.” (scoringguide 2007 s 1). Scoringguiden bruker et tosiffersystem. Det første sifferet indikerer graden av korrekthet i svaret, og det andre sifferet brukes til å klassifisere metoden som er brukt, eller for å spore vanlige feil eller missoppfatninger. Det første sifferet for korrekt eller delvis korrekt svar er 1 eller 2. Da man startet opp med TIMSS-undersøkelsene, ble det bestemt at 0 skulle ikke brukes som førstesifferkode, og det ble bestemt at 7 skulle brukes til uriktige svar, mens 9 skulle brukes til blanke besvarelser. Legg merke til at selv om elevene har riktig svar på en åpen oppgave, men ikke tilfredsstillende viser hvilke metode de har brukt for å løse oppgaven, så brukes det 7-kode. Dette virker kanskje litt kontraintuitivt, at et rett svar kodes som feil, men grunnen er altså at man må tydelig vise hvordan man finner svaret. Ellers kunne vi risikere at elever som har jukset og fått svaret fra sidenmannen hadde blitt registrert som korrekt.

Det andre sifferet for korrekt, delvis korrekt og gale svar gir diagnostisk informasjon om besvarelsen, for eksempel hvilken metode som har blitt benyttet, og til dette brukes heltallene 0 til 5. Vi har dermed avsatt kodene 10-15, 20-25 og 70-75 til dette formålet. Tallet 9 som andre siffer indikerer ”other” for både riktige og gale svar, dvs kode 19, 29 og 79 er avsatt til dette. I denne sammenheng er ”other” for de elevbesvarelsene som ikke passer i de allerede predefinerte svarkategoriene. Ofte er alle uriktige svar gitt kode 79, med mindre der er en eller flere koder for en vanlig matematisk misoppfatning. Denne framstillingen var i hovedsak riktig i de tidligere studiene, men i de senere årene har det vært et ønske om å differensiere bruken av 9-er kode. I oppgavene i TIMSS Advanced 2008 finnes det eksempel på ”gammel bruk” av 9-er koder, siden disse oppgavene har blitt arvet fra tidligere studier, mens de nyere oppgavene vil bli kodet på en noe forskjellig måte.

Kode 99 betyr en blank besvarelse, og det er da meget viktig for en analyse at kode 99 bare er brukt for de tilfeller der det er ingen indikasjon på at elevene har forsøkt å løse oppgaven overhode. Om det finnes bevis for at studenten bare har gjort et ørlite forsøk på å løse problemet, så skal kode 79 brukes. For eksempel om man har en besvarelse som er krysset over, eller forsøkt visket ut, så skal kode 79 brukes, ikke 99. Andre siffer 7 og 8 er reservert for ”national options”. Dette betyr at deltagerland som ønsker å spore en spesiell type løsningsmetode som ikke er forhåndsdefinert i scoringguiden, så kan de bruke disse kodene til dette formålet. Det er vært å merke seg at disse kodene vil likevel bli rekodet til 79 koder i de internasjonale databasene.

Etter denne kodingsprosedyren, blir det også gitt poeng på de ulike oppgavene, og hver elev blir gitt en total poengsum. Ved bruk av kode mellom 20 og 29, blir det gitt to poeng for svaret, mens koder mellom 10 og 19 gis det ett poeng for, mens resten av kodene gir null poeng (Angell m.fl. 1999 s 14). Videre blir disse resultatene tilpasset slik at vi kan sammenligne poengsum og resultat på tvers av heftene, siden kan ha ulikt antall oppgaver og dessuten kan maksimal oppnåelig poengsum variere noe. Dette gjøres ved å tilpasse resultatet fra hvert av heftene med en statistisk fordelingsfunksjon, og så justeres disse slik at de kan naturlig sammenlignes på tvers av heftene, for mer, se for eksempel Kleve 1994. Legg merke til at 20-koder gir dobbelt så mye poeng som 10-koder, slik at for mer omfattende oppgaver, vil man både bruke 20-koder og 10-koder for å skille mellom elever som har delvis korrekt svar, og fullstendig korrekt svar. I mer enkle oppgaver, vil man ikke bruke 20-koder, så for de enkle oppgavene, betyr kode 10 helt korrekt svar. Derfor, for å kunne lage en grafisk framstilling over hvor mange elever som har fått helt korrekt eller delvis korrekt i de oppgavene som ble undersøkt, måtte jeg derfor skrive prosentandelen av elever med 10-kode i kolonnen for 20-kode i de to tabellene i kap 7.3 i oppgaver hvor

20- koder ikke ble brukt. Denne rekodingen valgte jeg fordi dette gjør det mulig å beregne gjennomsnitt for hvor mange som klarer å løse oppgavene fullstendig og bare delvis. For en videre innføring i utviklingen av feilkoder finnes i Mullis & Martin (1996) og Martin & Kelly (1996).

6.3 Utvalg av skoler og fordeling av heftene

Skolene velges ut etter bestemte internasjonale kriterier som sørger for at elevene som undersøkes blir representative for nasjonen. Materialet som brukes blir hovedsakelig utviklet på engelsk og blir så oversatt til de ulike språkene som er aktuelle for undersøkelsen. En fremstilling av denne prosessen finnes for eksempel i Angell m.fl. 1999 s 15 og Leiren & Ludvigsen 2005 s 20-24.

Det fins 4 hefter med matematikkoppgaver i hovedundersøkelsen, mens i pilotundersøkelsen ble det brukt 3 hefter. Hver elev arbeider bare med ett hefte, og de fleste oppgavene fins i flere av heftene, dette gir en "mechanism for linking the student responses from the various booklets. Booklets are distributed …so that the groups of students responding to each booklet are approximately equivalent…" (Garden m.fl. 2006 s 37).

I 1998 var det utvalgt 1386 elever fra 63 skoler over hele Norge, se Angell m.fl. s 223-224. Studien til Leiren & Ludvigsen er ikke representativ, siden de testet norske elever utelukkende fra Trøndelag. De testet 237 2MX-elever og 176 3MX-elever fra til sammen 7 skoler. Pilotstudien i 2007 testet 700 elever fra 21 skoler. En framstilling av kjønnsfordelingen blant avgangselevene som har deltatt i disse tre undersøkelsene fins i tabell 6.1

år	gutter	jenter	antall elever	ikke opgitt kjønn	antall skoler
1998	829	544	1386	13	63
2005	108	68	176	0	7
2007	391	308	700	1	21

Tabell 6.1 Fremstilling av kjønnsfordelingene i studiene fra 1998, 2995 og 2007 (informasjon fra Angell m.fl 1999 s 161 og Leiren & Ludvigsen s 23)

Tabell 6.1 viser også hvorfor en sammenligning av de tre studiene er så problematisk, både i forhold til elevstørrelse, men også i forhold til antall skoler som har deltatt i de respektive undersøkelsene.

6.4 Databehandling

Etter at rettingen/kodeingen var fullført, ble informasjonen skrevet inn i en datafil. Jeg fikk oversendt en forenklet versjon av denne datafilen i januar 2008 fra instituttet, og begynte så å studere denne ved hjelp av statistikkprogrammet SPSS (versjon 14.0.2) som er installert på universitetets datapark. For å finne konfidensintervall brukte jeg uavhengig t-test. Noen beregninger og sammenligninger av resultatene fra de tre undersøkelsen ble gjort i Excel. I pilotstudien er det ikke blitt beregnet gjennomsnitt, medianverdi og variansmål på resultatene av oppgavene overhodet. Grunnen til dette er at resultatene har blitt kodet inn som 1,2,3 og 4 i flervalgsoppgavene, mens for de åpne oppgavene så er kodingen blitt gjort i henhold til beskrivelsen i kap 6.2. Disse tallene er derfor nominale, dvs de tallene vi bruker er arbitrære og rekkefølgen er naturligvis tilfeldig. Å beregne de vanlige statistiske størrelsene blir derfor noe meningsløst. I de tre heftene fins det til sammen 87 oppgaver og av disse er det 28 oppgaver som kan løses ved derivasjon og 2 oppgaver som handler om å finne en grenseverdi. Noen av de 28 er strengt tatt geometrioppgaver, men noen av dem omfatter metoder og teknikker som hører naturlig under derivasjon. Alle disse 30 oppgavene kan naturligvis ikke presenteres, det ville bli alt for omfattende. Jeg har derfor valgt ut 12 av dem, siden disse har mye til felles med oppgavene i studien til Leiren & Ludvigsen. Motivasjonen for dette er at når oppgavene er like av type og vanskelighetsgrad, er det lett å sammenligne. De to foregående studiene hadde en veldig overvekt av flervalgsoppgaver, og veldig få åpne oppgaver. Det er derfor ikke så enkelt å sammenligne med de åpne oppgavene som finnes i TIMSS Advanced, og en slik sammenligning har derfor bare blitt gjort i liten grad. Hovedmålsetningen til min studie er å se på elevens besvarelser, samt å se på trender de siste ni årene. Grunnen til at det er så mange flervalgsoppgaver i pilotundersøkelsen er at det var ønske om å teste ut en del oppgaver, men ikke alle av disse blir brukt i selve hovedundersøkelsen.

Min arbeidsprosedyre var å arbeide meg gjennom de tre heftene, og løse alle de 30 matematikkoppgavene som jeg har plukket ut. Ved å selv løse oppgavene vil man muligens støte på utfordrninger som også elevene nok har måtte streve med. Denne arbeidsformen ble valgt fordi det gir verdifull informasjon over strukturen av besvarelsene, og av svarfordelingene kan man da i noen grad anslå hvilke vanskeligheter elevene møter. Jeg har også i stor grad forsøkt å 'løse' oppgavene galt, dvs ved å bevisst gjøre feil som jeg kjenner igjen fra min egen tid som elev, samt typiske feil jeg har sett blitt gjort av andre elever i undervisningssammenheng. Slike typiske feil kan være med å forklare hvorfor elever velger gale svaralternativ på flervalgsoppgaver for eksempel.

Heftene inneholder også et spørreskjema med 4 spørsmål angående kalkulatorbruk under testen. Videre medfølger et separat elevspørreskjema og et lærerspørreskjema, men disse to spørreskjemaene vil ikke bli behandlet i denne studien, ei heller spørsmålene om kalkulatorbruk. Man kan utviltsomt få mye spennende informasjon fra å se på svarfordelingene i disse spørreskjemaene, men det blir for omfattende å inkludere dette i masteroppgaven.

Opprinnelig var også planen å undersøke om det var en kjønnsfordeling i derivasjon. Denne planen ble jeg nødt til å legge til side etter å ha sett på elevenes resultater. Det viser seg nemlig at det på mange av oppgavene er så få elever som svarer riktig at det ikke er lett å trekke konklusjoner om kjønnsforskjeller i derivasjon ut fra dette materialet, se tabell 7.13 kap 7.3.

7. Analyser og resultater

TIMSS Advanced generalprøve i matematikk består av 3 hefter med til sammen 87 oppgaver. Det viser seg at vi har følgende fordeling mellom flervalgsoppgaver og åpne oppgaver i de tre heftene, se tabell 7.1.

	Flervalg	Åpne	Sum	% Flervalg
Hefte 1	17	13	30	56,7
Hefte 2	18	11	29	62,1
Hefte 3	19	9	28	67,9

Tabell 7.1 Fordeling av flervalgsoppgaver og åpne oppgaver

Av tabell 7.1 ser vi at antall oppgaver i de tre heftene er noe forskjellig, og det er også noe variasjon av antall flervalgsoppgaver og åpne oppgaver. Korrekt alternativ på flervalgsoppgavene merkes med * i kap 7. Skjermbildene er fra Casio $fx-9860G\ SD$ emulator.

7.1 Presentasjon av datamaterialet

Denne pilotundersøkelsen blitt foretatt ved 21 skoler og i 33 klasser; og antall elever som har vært med i undersøkelsen er 700. Antall elever i hver klasse varierer noe, og det er totalt 308 jenter og 391 gutter med i studien, mens én elev har ikke oppgitt kjønn, se tabell 7.2. I denne undersøkelsen er det altså et flertall av gutter. Grunnen til dette er nok i hovedsak at gutter velger 3MX i større grad enn jenter, så dette er nok med på å forklare skjevheten i populasjonen.

	Frekvens	Prosent
Jenter	308	44,0
Gutter	391	55,9
Missing	1	0,1
Total	700	100,0

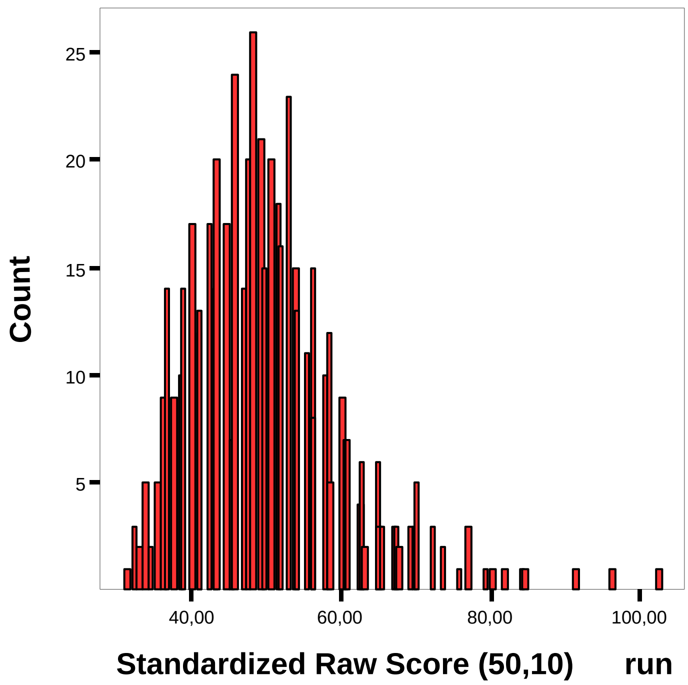
Tabell 7.2 Fordeling av gutter og jenter

Fordelingen av antall elever som har jobbet med de ulike heftene, fremgår av tabellen 7.3., og som vi ser er det en nokså lik fordeling. Distribueringen av heftene er slik at elever fra én og samme klasse har jobbet med alle de tre heftene.

	Antall elever	Elevfordeling
Hefte 1	231	33,0
Hefte 2	239	34,1
Hefte 3	230	32,9
Total	700	100,0

Tabell 7.3 Fordeling av elever på de tre heftene

Resultatene har blitt standardisert (50,10) dvs at den gjennomsnittelige skåren har blitt satt til 50 poeng med ett standardavvik på 10 poeng. I denne studien analyserer jeg den scoren som heter 'standardized raw score', dette etter anbefaling fra veilederne. Denne er standardisert slik at man kan sammenligne de tre heftene med hverandre, dvs sentraltendens og spredning har blitt justert slik at dette er mulig. Fordelingen av scoren for alle elevene i denne pilotstudien fremgår av figur 7.1.



Figur 7.1 Standardized Raw Score for TIMSS Advanced 2008

Vi ser at fordelingen ikke er symmetrisk, siden det er en hale til høyre i fordelingen. Dette betyr at noen elever har levert meget gode besvarelser. Dette er også rimelig, i en gruppe på 700 elever er det naturlig å finne noen med matematiske ferdigheter som langt overgår majoriteten. Riktignok er dette bare noen få elever. Høyden er 1 på alle søylene over 80,00 poeng, så til sammen er det bare 7 elever så har score over 80 poeng. 31,38 er den laveste poengsummen, mens 102,49 er den høyeste, hhv 1,86 og 5,25 standardavvik unna gjennomsnittsverdien. En mer detaljert statistikk av datamaterialet finnes i tabell 7.4.

Statistics

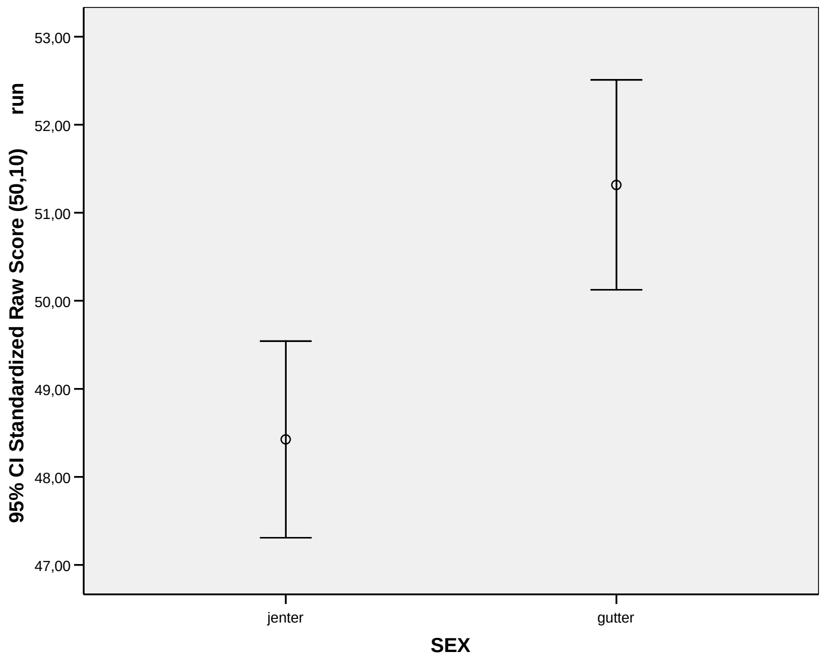
Standardized Raw Score (50,10) run

N	Valid	560
	Missing	140
Mean		50,0000
Median		49,2500
Std. Deviation		10,00894
Minimum		31,38
Maximum		102,49
Percentiles	25	43,1530
	50	49,2500
	75	55,3870

Tabell 7.4 Detaljert beskrivelse av Standardized Raw Score

Av tabell 7.4 ser vi at bare 560 elever har en score, og 140 elever har en helt blank besvarelse. 20 % av elevene leverer altså blankt, og dette er overraskende mange. Nærmere undersøkelser avdekker at 86 gutter og 53 jenter ikke har noen standardized raw score, dvs 22,0 % av guttene og 17,2 % av jentene svarer blankt på alle oppgavene i heftet, altså er guttene i flertall av de som svarer blankt. Den store andelen av blanke besvarelser kan nok i noen grad knyttes opp til noen elevers og læreres motivasjon i forhold til pilotundersøkelsen. Man kan ikke tvinge elevene til å gjøre sitt beste, og om ikke lærerne lykkes i å motivere elevene tilstrekkelig, så blir innsatsviljen nok påvirket av dette. Videre kan vi også tenke oss at motivasjonen til å gjøre sitt beste ikke nødvendigvis er like stor for en pilotundersøkelse som for hovedundersøkelsen. I Leiren & Ludvigsens undersøkelse var det veldig få blanke besvarelser (se kap 7.3), dette er nok naturlig siden de personlig møtte opp ved skolene og motiverte elevene til å være med i undersøkelsen, og gjøre sitt beste. Deres tilstedeværelse var nok også et viktig motivasjonsbidrag. Ytterligere analyse av Standardized Raw Score avslører at antall elever som svarer blankt er hhv 51, 38 og

51 i de tre heftene, i prosent hhv 22,1 %, 15,9 % og 22,2 %. Vi ser altså at færre elever besvarer hefte 1 og 3 enn hefte 2, uten at jeg har inntrykk av at vanskelighetsgraden er forskjellig i de tre heftene. Datamaterialet viser at guttene scorer signifikant bedre enn jentene. Dette kan illustreres grafisk med en error bar, som viser den signifikante kjønnsforskjellen i standardized raw score, se figur 7.2.



Figur 7.2 Error bar for Standardized Raw Score med 95 % konfidensintervall, splittet på kjønn. Gjennomsnittsverdien er 48.43 for jenter og 51,32 for gutter

Figur 7.2 viser at det ikke er noen overlapp mellom de to områdene, dette tyder på at denne kjønnsforskjellen ikke er en tilfeldighet. For å tallfeste sannsynligheten for at et slikt resultat blir til ved en tilfeldighet, så brukes en t-test, se tabell 7.5.

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Standardized Raw Score (50,10) run	Equal variances assumed	1,713	,191	-3,44	558	,001	-2,89003	,84121	-4,5424	-1,2377
	Equal variances not assumed			-3,48	557,708	,001	-2,89003	,82962	-4,5196	-1,2605

Tabell 7.5 Resultatet av en t-test av kjønnsfordelingen i Standardized Raw Score

t-testen viser at sannsynligheten for at dette resultatet skulle ha oppstått ved en tilfeldighet, er 0,1 %, som er langt under grensen på 5 %. Dette betyr at guttene scorer signifikant bedre i matematikk enn jentene. Dette er i samsvar med resultatet i TIMSS 1995, se kapittel 4.2.4. Ved å splitte opp datamaterialet på kjønn, gir dette at guttene har en (51.32, 10.58)-fordeling, mens jentene har en (48.43, 9.05)-fordeling. Dette betyr at guttene har en større spredning i resultatene enn det jentene har, dette kan vi også øyne ut fra figur 7.2, men dette er kanskje ikke så lett å se. Denne kjønnsforskjellen i matematikk er i samsvar med undersøkelsene i PISA (kap 4.1.2) og TIMSS (kap 4.2.4).

7.2 Resultater for utvalgte oppgaver

7.2.1 Oppgaver om grenseverdier

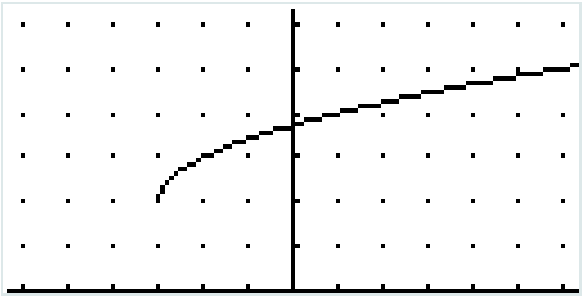
Leiren & Ludvigsen har med to slike oppgaver, den ene $"\infty/\infty"$ (oppgave 3) og den andre $"0/0"$ (oppgave 4). I pilotundersøkelsen fins ingen oppgaver av typen $"\infty/\infty"$, men det fins to oppgaver av typen $"0/0"$. Valg av hvilke oppgavetyper som blir testet preges i stor grad av behov. Om det er behov for uttesting av en oppgavetype, så gjøres dette, og det kan i noen tilfeller gå på bekostning av oppgaver som det ikke er behov for å teste. I hovedundersøkelsen er oppgaven fra TIMSS 1995 ($"\infty/\infty"$) med igjen (TIMSS Advanced 2008 1, 4). I hovedundersøkelsen fins også oppgaver med $"0/0"$, (TIMSS Advanced 2008 3, 4).

MA23153 (oppgave 1,25) Bestem $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{h-1}{\sqrt{h+3}-2}$ Vis fremgangsmåten 10: Correct response. 4; by algebraic manipulations 11: Correct response. 4; numerical approximation; substitution of value of h close to 1. 70: Incorrect response. 4; no method or wrong method given. 79: Incorrect response. Other incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	10: 0,0 11: 1,3 70: 0,0 79: 19,5 Blank: 79,2

Dette er et $"0/0"$-utrykk og kan løses på flere måter. Siden L 'Hopitals regel ikke er pensum i norske matematikkurs, så kan det ikke forventes at elevene deriverer teller og nevner hver for seg og ser på grensen:

$$\lim_{h\to 1}\frac{h-1}{\sqrt{h+3}-2} \overset{\frac{[0]}{[0]}}{=} \lim_{h\to 1}\frac{1}{\dfrac{1}{2\sqrt{h+3}}} = \lim_{h\to 1} 2\sqrt{h+3} = 2\sqrt{1+3} = 4$$

En slik strategi gjør oppgaven lett å løse, og noen land har L 'Hopitals regel i pensum. En løsningsmetode er å approksimere grensen ved å sette inn tall for $h \to 1^+$ og for $h \to 1^-$, og se at grensen blir sammenfallende og går mot 4. Av resultatene er det klart at bare 1,3 % har brukt en slik tilnærming og dermed fått kode 11. Man kan tenke seg at noen har tegnet grafen på kalkulatoren og funnet svaret grafisk, se figur 7.3.



Figur 7.3 Grafisk løsning av oppgave MA23153

Ingen elever har derimot blitt gitt kode 70, så dette er sannsynligvis ikke tilfelle. Dette er noe overraskende, for i læreverket til Erstad m.fl 2001, er det ingen algebraiske manipulasjoner innen dette temaet vist. Alle eksemplene er løst på kalkulator, særlig er tabellfunksjonen mye brukt (Erstad m.fl 2001 s 122-125). Dette læreverket er en del brukt i norsk skole, så der er derfor naturlig å forvente at noen av elevene løser oppgaven på denne måten. 19,5 % av elevene har fått kode 79, men i denne feilkoden ligger også tegninger og aktiviteter som har lite med matematikk og gjøre, se kap 6.2. Noen av elevene med kode 79 har nok gjort et forsøk på å løse oppgaven, men de har ikke funnet det korrekte svaret. Følgende algebraiske manipulasjon vil gi kode 10:

$$\lim_{h\to 1}\frac{h-1}{\sqrt{h+3}-2}=\lim_{h\to 1}\frac{(h-1)(\sqrt{h+3}+2)}{(\sqrt{h+3}-2)(\sqrt{h+3}+2)}=\lim_{h\to 1}\frac{(h-1)(\sqrt{h+3}+2)}{(h+3)-4}$$

$$=\lim_{h\to 1}\frac{(h-1)(\sqrt{h+3}+2)}{h-1}=\lim_{h\to 1}\sqrt{h+3}+2=\sqrt{1+3}+2=4$$

Av resultatene ser vi at ingen elever har gjort en slik manipulasjon. Riktignok er en slik løsningsmetode ikke helt elementær, man må huske at ved å gange med det konjugerte utrykket av nevneren, så kan man benytte seg av tredje kvadratsetning

/konjugatsetningen der $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Dessuten brukes ved utganging av nevneren at $\left(\sqrt{h+3}\right)^2 = h+3$ per definisjon av kvadratroten, og dermed blir rotutrykket fjernet i nevneren. Det må her opplyses at ingen av disse formlene er inkludert i utvalget av matematiske formler som fins under "noen utvalgte matematiske formler" først i heftene. Legg merke til at 79,2 % svarer blankt på denne oppgaven. Dette må sies å være en veldig stor andel av elevene.

MA23165 (oppgave 2,10) Bestem $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ Vis fremgangsmåten 10: Correct response. $3/2$; by algebraic manipulations 11: Correct response. $3/2$; numerical approximation; substitution of value of x close to 1. 70: Incorrect response. $3/2$; no method or wrong method given. 79: Incorrect response. Other incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	10: 2,9 11: 0,8 70: 0,8 79: 34,7 Blank: 60,7

Dette er et $"0/0"$-utrykk, og denne kan løses på flere måter. Som i oppgave MA23153 kan oppgave MA23165 løses ved å approksimere med tall nærme 1, dette har de 0,8 % med kode 11 gjort. En grafisk løsning er vist i figur 7.4, kanskje har de 0,8 % med kode 70 funnet verdien slik? Legg merke til at 0,8 % betyr 2 elever, så det er dermed ikke mange elever som har funnet svaret med verken en numerisk approksimasjon eller ved andre metoder som disse to elevene ikke viser i løsningen sin.

Figur 7.4 Grafisk løsning av oppgave MA23165

I figur 7.4 kan man se at for $x=1$ så har vi en diskontinuitet, men ved å bruke trace-funksjonen, eller table-programmet, så er det lett å finne grenseverdien. Den algebraiske manipulasjonen som vil gi kode 10 kan gjøres ved å faktorisere teller og nevner og stryke like faktorer, og deretter se på grensen:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

Av svarfordelingen ser vi at 2,9 % av elevene har gjennomført et slikt resonnement. En annen teknikk som er behandlet i bare ett læreverk (Sandvold m.fl. 2001 s 72) er å dividere hvert ledd i telleren og nevneren med den høyeste potensen av x. Denne metoden virker riktignok bare når $x\to\pm\infty$, og i denne oppgaven vil utrykket fortsatt være et $"0/0"$-utrykk etter en slik operasjon. Kanskje har noen med feilkode 79 forsøkt dette uten å finne det riktige svaret?

Ved å sammenligne oppgave MA23153 og MA23165 så ser vi at elevene i større grad svarer blankt på den første oppgaven 79,2 % mot 60,7 %. Dette betyr at det store flertall av elevene svarer blankt på disse to oppgavene. Det er kanskje ikke så overraskende at flere elever besvarer MA23165 siden denne nok er mye lettere å løse. Det er derimot betydelig flere som har kode 79 i MA23165, så selv om denne er lettere å løse, så er det liten forskjell på hvor mange som faktisk klarer å løse disse to oppgavene. For å løse oppgave MA23165 må man faktorisere teller og nevner, og dette kan man gjøre ved å bruke faktoriseringsformelen for andregradsligninger eller ved hjelp av equa-programmet på kalkulatoren. Det må her opplyses at faktoriseringsformelen for andregradsligninger, $ax^2=bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ inngår i formelsamlingen elevene benytter seg av til vanlig (Utdanningsdirektoratet 2001 s 8), men inngår ikke i ”noen utvalgte matematiske formler” først i heftene. Noen elever vil nok også kunne se hvordan teller og nevner kan faktoriseres direkte i MA23165, men kanskje ville flere elever klart dette om faktoriseringsformelen hadde vært tilgjengelig for dem? Nevneren kan for øvrig faktoriseres direkte ved å bruke 3. kvadratsetning. Det er kanskje likevel noe overraskende at bare 2,9 % løser denne oppgaven med en slik algebraisk manipulasjon. Oppgave MA23165 blir repetert i hovedundersøkelsen, så vi vil få mer informasjon om hvordan denne oppgaven har falt ut da. I hovedundersøkelsen må også oppgaven: $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)(x+1)}{3x^2-2}$ løses, dette er riktignok en flervalgsoppgave med 5 alternativer (oppgave 1,4) og et $"\infty/\infty"$-utrykk. I undersøkelsene i 1998 og 2005 var $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ med (oppgave 4), som er et $"0/0"$-utrykk. Denne oppgaven er frigitt (TIMSS URLc). Denne grenseoppgaven er noe spesiell, siden dette faktisk er den deriverte til funksjonen $\sqrt{x}$ for $x=2$, og Leiren & Ludvigsen konkluderer med at den lave løsningsprosenten tyder på at elevene bare i liten grad ser dette (Leiren & Ludvigsen 2005 s 74).

Det fins eksempler på oppgaver om grenseverdier i norske lærebøker, men ikke særlig mange. Sandvold m.fl. 2001 og Oldervoll m.fl. 2001 er de læreverkene som mest omtaler de metodene man trenger for å løse slike oppgaver algebraisk. Sandvold m.fl. 2001 er det eneste av de tre læreverkene jeg har undersøkt som tar for seg grenseverdier med kvadratrøtter og grenseverdien der $h\to\pm\infty$. Det er derfor kanskje ikke så overraskende at norske elevene bare i liten grad løser disse oppgavene. Dessuten ble grenseverdier tonet ned ved revisjon av læreplanen i år 2000 (se kap 9.1), og det er derfor naturlig å tenke seg at elevene i 1998 gjorde det bedre enn de som ble testet i 2005 og 2007. I studiene i 1998 og 2005 var grenseoppgavene for øvrig flervalgsoppgaver (oppgave 3 og 4).

		2MX05	3MX05	3MX98	Int95
Oppgave 3	korrekt	37,3	44,9	55,5	61,0
Oppgave 3	blank	4,0	6,3	4,7	5,0
Oppgave 4	korrekt	16,9	20,5	21,2	27,7
Oppgave 4	blank	5,0	7,4	7,5	6,1

Tabell 7.6 Svarfordelingene på oppgaver om grenseverdi fra 1998 og 2005. Resultater fra Leiren & Ludvigsen 2005 s 71 og 74.

Av tabell 7.6 er helt i tråd med hva som kan forventes etter den revisjonen læreplanen gjennomgikk. Videre gjorde elevene i 3MX det bedre enn elevene i 2MX. Elevene i 3MX har ikke om grenseverdier i sin læreplan, men samtidig har de ett ekstra år med matematikkopplæring bak seg, så det er derfor ikke så overraskende at de gjorde det noe bedre. Begge de norske klassetrinnene skårer noe svakere enn internasjonalt snitt fra 1995. Videre er det klart at elevene i større grad svarer korrekt på disse to flervalgsoppgavene i tabell 7.6, enn de to åpne oppgavene som er med i pilottesten. Siden vi har en forskjell mellom flervalgsoppgaver og åpne oppgaver, er det ikke mulig å sammenligne direkte for å se om det er en tilbakegang fra 1998. I hovedundersøkelsen blir en slik sammenligning mulig siden oppgaven 3 blir gjentatt.

7.2.2 Derivasjon av brøker

I pilottesten er det 2 (egentlig 3, men én inneholder en kjerne, se 7.2.3) derivasjonsoppgaver med brøker. Begge presenteres her.

MA23159 (oppgave 2,5) Finn $f'(x)$, når $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$ Vis fremgangsmåten 10: Correct response. $f'(x)=\frac{-5}{(x-1)^2}$; method shown 70: Incorrect response. Correct answer but no method shown 71: Incorrect response. Using quotient rule $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ but not completing with correct answer 72: Incorrect response. Using product rule $(uv)'=u'v+uv'$ but not completing with correct answer 73: Galt svar. Bruker "derivasjonsregel" $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'}{v'}=\frac{3}{1}=3$ 79: Incorrect response. Other incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	10: 9,2 70: 0,0 71: 19,2 72: 3,8 73: 17,2 79: 20,1 Blank: 30,5

NB: Feilkode 73 fins ikke i scoringguiden. Dette er en nasjonal kode som ble definert i løpet av rettingen fordi så mange av elevene hadde løst oppgaven på denne måten. ”Dette er selvsagt ikke verdt poeng, men det var såpass mange norske elever som "løste" oppgaven slik, at vi fant det interessant med egen feilkode” (e-post fra Torgeir Onstad 21.april).

Av egen undervisningserfaring, så har jeg flere ganger sett elever blande sammen derivasjonsreglene for produkt og brøk, så feilkode 72 er derfor svært naturlig. Det er gledelig lesning at bare 3,8 % av har gjort denne feilen. Et annet fenomen som heller ikke er helt ukjent, er at derivasjonsregelen for brøk brukes helt korrekt innledningsvis, men av ulike grunner så stopper ting opp, og utrykket blir ikke forenklet videre. Strukturen i besvarelse burde vært slik:

$$f'(x)=\frac{(3x+2)'(x-1)-(3x+2)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{3(x-1)-(3x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{3x-3-3x-2}{(x-1)^2}=\frac{-5}{(x-1)^2}$$

,men i stedet så stopper det opp ett eller annet sted; gjerne med fortegnsfeil eller andre problemer som oppstår når parentesene i telleren skal ganges ut. Det er også vanlig at elever ganger ut nevneren i et slikt utrykk. Dette er ofte ikke fordelaktig, fordi det hender at telleren ofte inneholder en felles faktor med nevneren, slik at utrykket kan forkortes. Dette er dog ikke tilfelle i denne oppgaven. Hele 19,2 % gjør regnefeil eller stopper opp før de har forenklet utrykket, og får kode 71, dette til tross for at de har brukt korrekt formel. Kanskje ser ikke elevene at leddene som inneholder x i telleren kanselleres? 9,2 % av elevene finner rett svar, dette er noe lavt, siden til sammen 28,4 % av elevene tross alt husker en såpass komplisert formel som det brøkregelen faktisk er. Ingen elever har kode 70, dette er naturlig siden det neppe er mulig å løse oppgaven uten å derivere ved regning, siden den grafiske kalkulatoren ikke kan regne symbolsk. Det må her opplyses at i de matematiske formlene i pilotundersøkelsen, så inngår det ikke noen derivasjonsregler. I hovedundersøkelsen derimot er formelen for derivasjon av produkt og brøk blitt inkludert. I de senere årene har det vært vanlig å benytte seg av et formelhefte i matematikk i videregående skole, og her finner vi derivasjonsreglene for produkt og brøk og for flere elementærfunksjoner (Utdannigsdirektoratet 2001 s 12). Det kan nok derfor tenkes at mange elever ikke lærer seg derivasjonsreglene, fordi hver gang de har bruk for dem, så kan de bare slå opp i heftet (se også Leiren & Ludvigsen s 25). Dette kan nok være med på å forklare hvorfor en del elever blander sammen produktregelen og brøkregelen. Denne forklaringen styrkes av at hele 17,2 % ”løser” denne oppgaven ved å bruke $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$ som gir at den deriverte er en konstant (feilkode 73). En slik metode er overraskende, og det er vel naturlig å se for seg at disse elevene i stor grad har en prosess-tilnærming til den deriverte, og ikke ser for seg objektets egenskaper i denne sammenheng (se kap 5.3.5). Det må vel forventes at elevene vet at den deriverte til en rasjonal funksjon bestående av førstegradsfunksjoner i teller og nemner ikke kan være en konstant? På den annen side, siden elevene har en metode som ligner veldig på L 'Hopitals regel, kan dette kanskje være en motivasjon for å innføre L 'Hopitals regel i skolematematikken?

MA23154 (oppgave 1,4) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ Hva er $f''(x)$? 10: Correct response. $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3}$; or equivalent 70: Incorrect response. $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$ or equivalent 79: Incorrect response. Other incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	10: 13,4 70: 6,1 79: 53,7 Blank: 26,8

Oppgaven tester om elevene behersker å derivere en enkel andregradsfunksjon samt å derivere en brøk. Riktignok kan det siste leddet skrives om som en potens, og så deriveres ved hjelp av potensreglen. Jeg har likevel valgt å presentere oppgaven her. Funksjonen skal deriveres to ganger, og det er derfor mulig å gjøre regnefeil i flere av stegene, særlig fortegnet i det siste leddet kan være et problem. At noen elever deriverer bare én gang er ikke så veldig overraskende, dette kjenner jeg også til av egen undervisningserfaring, og kan nok i noen grad forklares ved at elevene overser at det er to primtegn i spørsmålet, og er derfor i den villfarelse at de skal bare finne den førstederiverte. Bare 6,1 % av elevene gjør denne feilen, dette er positivt. Videre er dette elever som behersker å derivere et slikt utrykk, og det er derfor naturlig å tenke seg at disse elevene nok også hadde klart å finne den andrederiverte. 13,4 % av elevene fullfører derivasjonen også for den andrederiverte. 26,8 %, har ikke svart på denne oppgaven, noe som er noe bedre enn for oppgave MA23159. Oppgave MA23154 kan hovedsakelig løses på to måter. Ved brøkregelen og ved potensregelen:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 2 + \frac{2x}{\left(x^2\right)^2} = 2 + \frac{2}{x^3}$$

$$f(x) = x^2 + x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 2x - x^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2 + 2x^{-3}$$

Det er nok mulig at denne siste metoden nok er den letteste, likevel vil begge metoder nok føre til usikkerhet i forhold til fortegnet til ledd nummer to i utrykket. Den lave løsningsprosenten tyder nok på at elevene har problemer med begge metodene, hele 53,7 % har galt svar. Hos Leiren & Ludvigsen var det bare én oppgave om derivasjon av brøk, og dette var en flervalgsoppgave, se tabell 7.7

	2MX05	3MX05	3MX98	Int95
korrekt	23,4	30,1	40,2	51,7
blank	5,5	5,1	7,3	5,8

Tabell 7.7 Svarfordelingene på brøkoppgavene fra 1998 og 2005. Resultater fra Leiren & Ludvigsen 2005 s 76.

Legg merke til hvor få som svarer blankt både i 1998 og 2005, ellers er videre sammenligning vanskelig. MA23154 repeteres forøvrig i hovedundersøkelsen.

7.2.3 Sammensatte funksjoner

En sammensatt funksjon $f(x)$ er en funksjon som er en komposisjon av to funksjoner $g(x)$ og $h(x)$, slik at $f(x) = g(x) \circ h(x) = g(h(x))$ (Marsden & Hoffman 1993 s 6).

MA23161 (oppgave 1,17)	A: 25,1
Hvis $f(x) = \sin^2 x$, så er $f'(x)$ lik	B*: 8,7
	C: 14,7
A: $f'(x) = 2\sin x$	D: 25,1
B: $f'(x) = \sin 2x$	Blank: 26,4
C: $f'(x) = \cos^2 x$	

D: $f'(x) = 2\cos x$	

Det mest overraskende med denne oppgaven er at ingen av svaralternativene ved første øyekast ser ut til å være riktige! Etter mine begreper er det to naturlige måter å løse denne oppgaven på, ved kjerneregelen eller produktregelen. Velger man å bruke produktregelen, så skriver man $f(x) = \sin x \cdot \sin x$, og bruker derivasjonsregelen rett fram etter nesen. Mer elegant er det å bruke $u = \sin x$ som kjerne og løse dette ved hjelp av kjerneregelen. Kjerneregelen gir at $f'(x) = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x$. Siden ingen av alternativene ser ut til å stemme overens med dette resultatet, så blir muligens denne oppgaven noe vanskelig for elevene. Likevel bør vi forvente at elevene ikke svarer alternativ A eller B, siden A bare har "flyttet ned to-tallet" og B har en tilsvarende strategi, men her har to-tallet kommet inn i argumentet. Vi må forvente at elevene vet at $(\sin x)' = \cos x$, og ved å huske at dette er en potensfunksjon, så vil muligens D vise seg å være det mest naturlige svaralternativet. Løsningen på den tilsynelatende mangel av et korrekt svaralternativ, er å bruke noen av de trigonometriske identitetene, for eksempel at $2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$, og dermed er alternativ B korrekt. Legg merke til at bare 8,7 % har korrekt svar. Det fins to like store grupper som svarer hhv kategori A og D, og dette fortjener noe ettertanke. For små vinkler ($x \in [0,5]$) har vi at $2\sin x \cdot \cos x \approx 2\sin x$, og store vinkler for($x \in [85,90]$) har vi at $2\sin x \cdot \cos x \approx 2\cos x$. (Disse intervallene for x er ikke eksakte, bare veiledende!) Disse tilnærmingene kan føre til at alternativ A og D blir distraktorer for elever som sjekker noen verdier på kalkulatoren. Kanskje er dette noe av forklaringen på den store oppslutningen for alternativ A og D?

Denne oppgaven kan man kritiserer for å inneholde en "oppgave i oppgaven", eller en skjult oppgave. Personlig mener jeg at det er grunn til å tro at flere av elevene deriverer funksjonen korrekt og finner at $f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$, men ser så at ingen av alternativene stemmer overens med deres svar, og de konkluderer med at det feil i fasit (det finnes eksempel på at elever har kommentert dette i besvarelsen). Det var et betydelig større fokus på trigonometriske identiteter de tidligere versjonene av 2MXlærebøkene (se for eksempel Erstad m.fl. 1995 s 208-212), men dette har blitt tonet kraftig ned i de senere år, og i de tre læreverkene jeg har undersøkt, er slike identiteter nå ute av pensum. Riktignok fins disse identitetene fortsatt i formelheftet (Utdanningsdirektoratet 2001 s 11), uvisst av hvilken grunn. Dette formelheftet har ikke elevene anledning til å bruke under pilotstudien, og det er vel lite som tyder på at elevene har memorert disse identitetene, siden de har lite eller ingen bruk for dem i skolematematikken. Det er altså grunn til å tro at elevene ikke forventer en slik sammenheng, og blir da tvunget til å velge et av alternativene. Siden denne oppgaven muligens er litt uvant for elevene, så ble jeg litt nysgjerrig hvordan svarene fordeler seg blant elevene som oppnår en høy poengsum kontra en lav poengsum. Jeg delte elevmassen i to grupper, de som fikk mer enn 50 poeng ($\leq$) og de som fikk mindre enn 50 poeng ($>$). Grensen er satt siden dette er den gjennomsnittelige verdien, ulikhetene er satt for at gruppestørrelsene ikke skal være alt for ulike (79 elever med høy score og 101 elever med lave score). Fordelingen i disse to undergruppene i forhold til den opprinnelige fordelingen ble da slående, se tabell 7.8.

alternativ	Høy score	Lav score
A	17,7	43,6
B*	11,4	10,9
C	17,7	19,8
D	45,6	20,8
Blank	7,6	5,0

Tabell 7.8 Svarfordeling i oppgave MA23161 splittet på elever med hhv høy og lav Standardized Raw Score

Tabell 7.8 viser at de antatt svake elevene i mye større grad mener at alternativ A er korrekt, over dobbelt så mange svarer alternativ A i forhold til de som svarer alternativ D i denne gruppen. De antatt svake elevene faller nok da for fristelsen å flytte ned 2-tallet. De antatt beste elevene mener i større grad at alternativ D er korrekt, kanskje har de derivert med $\sin x$ som kjerne, 2 tallet kommer ned og den deriverte av sinus blir cosinus, men så var det denne deriverte av kjernen da, kanskje har den blitt glemt? Å glemme å gange med den deriverte av kjernen har jeg sett i egen undervisningspraksis. Derimot er det ingen klar tendens til at de flinke elevene i større grad velger alternativ B enn de svake elevene. Dette kan bety at de trigonometriske identitetene i stor grad er ukjent, også for de flinke elevene.

MA23039 (oppgave 1,18) $f(x)=e^{\cos x}$ Hva er $f'(x)$? A: $e^{\cos x}$ B: $e^{-\sin x}$ C: $e^{\cos x}\cdot\sin x$ D: $-e^{\cos x}\cdot\sin x$	A: 28,1 B: 8,2 C: 13,9 D*: 23,4 Blank: 26,4

Oppgave har til hensikt å undersøke om elevene behersker å derivere en eksponentialfunksjon, samt å bruke kjerneregelen. Alternativ A fanger opp alle som husker at $(e^x)'=e^x$, men ellers glemmer at kjerneregelen må brukes. Alternativ B er distraktor for dem som husker at $(\cos x)'=-\sin x$, men ikke tar hensyn til at den trigonometriske funksjonen er en del av en sammensatt funksjon. Alternativ C har feil fortegn, mens alternativ D er korrekt. Flertallet går i den første fellen, 8,2 % går i den andre fellen og 13,9 % har fortegnsfeil, mens 23,4 % har riktig løsning. Det er dermed tydelig at flere elever her har en prosess- tilnærming til deriveringen og ser ikke ut til å reflektere over objektets egenskaper. Oppgave MA23039 blir repetert i hovedundersøkelsen, så vil får mer informasjon over elevenes besvarelser da.

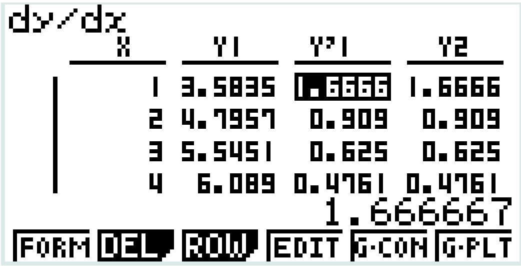
MA23026 (oppgave 3,19) $f(x)=\ln(5x+1)^2$, Hva er $f'(x)$? A: $\dfrac{10}{5x+1}$ B: $\dfrac{5}{5x+1}$	A*: 17,4 B: 7,4 C: 16,5 D: 26,1 Blank: 32,6

C: $\frac{5}{(5x+1)^2}$ D: $\frac{1}{(5x+1)^2}$	

For å løse denne oppgaven, må man behersker derivasjon av logaritmefunksjonen, samt å bruke kjerneregelen to ganger. Vi har dermed:

$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}\left[(5x+1)^2\right]}{(5x+1)^2} = \frac{2(5x+1)\cdot 5}{(5x+1)^2} = \frac{10}{5x+1}$. Altså er alternativ A korrekt.

At flertallet velger alternativ D er ikke overraskende. Dette er en distraktor for dem som behandler utrykket som en logaritmefunksjon, og husker at $(\ln x)' = 1/x$, men uten å ta hensyn til at dette er en sammensatt funksjon. Objektets egenskaper blir altså forsømt, og man anvender bare en derivasjonsregel for en elementærfunksjon. Alternativ C er distraktor for dem som husker at de må gange med den deriverte av kjernen, men disse elevene ser ut til å være under den villfarelse at kjernen er $u = 5x + 1$. Distraktor B er for de elevene som bruker $u = (5x+1)^2$ som kjerne, men glemmer å gange med den deriverte av kjerne nummer to, $w = 5x + 1$, de mangler da dermed en faktor 5 i telleren. At alternativ B har minst oppslutning er naturlig, siden vi må forvente at om elevene husker den deriverte av kjernen, så er det nok trolig at disse elevene også i stor grad husker å gange med den deriverte av kjerne nummer 2. 17,4 % av elevene behersker dette, og velger riktig alternativ. Siden disse tre oppgavene er flervalgsoppgaver skulle man tro at mange ville benytte seg av kalkulatoren for å sjekke hvilke av alternativene er korrekte. De grafiske kalkulatorene som er vanlig i videregående skole, kan ikke regne symbolsk. Derfor kan man ikke be kalkulatoren finne løsningen algebraisk, men likevel er det mulig å få mye hjelp av kalkulatoren. Ved å bruke table-funksjonen så kan man skrive inn det opprinnelige problemet og så sjekke hvilket alternativer korrekt, se figur 7.5.



Figur 7.5 Numerisk kontroll av oppgave MA23026 ved hjelp av kalkulatoren

I Figur 7.5 er Y1 $f(x)$, Y´1 er kalkulatorens numeriske beregning av dy/dx for tilhørende x-verdier. Y2 er alternativ A. Ved å sammenligne kolonnene Y´1 og Y2 ser vi at de deriverte er identiske for alle x, dermed er alternativ A korrekt. En sammenligning med de andre alternativene ville avslørt dem som gale. Denne metoden beror seg på at elevene kjenner til at kalkulatoren kan beregne den deriverte numerisk, og at de kjenner de innstillinger som må gjøres. I flervalgsoppgaver går det dermed forholdsvis raskt å sjekke hvilke alternativ som er korrekt siden det er bare fire alternativer. Fordelingen av svarene tyder imidlertid på at elevene nok bare i liten grad kjenner til at kalkulatoren kan brukes til dette. En indikasjon på at få av elevene kjenner til denne bruken av kalkulatoren er forøvrig gledelig, hadde alle elevene benyttet seg av denne metoden, ville alle flervalgsoppgavene med derivering og integrering på denne formen blitt noe meningsløse. Man ville havne i samme situasjon som for uttestingen av symbolregnere i en 3MX-klasse av Dag-Erik Møller: ”slike rene derivasjonsoppgaver har meget liten verdi med et CAS-verktøy” (Møller 2006 s 75). Da ville det bare blitt en kontroll på hvilke elever er det som ikke behersker å skrive riktig syntaks til kalkulatoren, og lite annet. I Leiren & Ludvigsens undersøkelse var det én oppgave der kjerneregelen måtte brukes, $f(x) = e^{x^2}$ (oppgave 6) og denne ligner veldig på MA23039. I begge oppgavene må man benytte kjerneregelen to ganger. Oppgaven 6 blir gjentatt i hovedundersøkelsen.

	2MX05	3MX05	3MX98	Int95
korrekt	54,7	63,6	72,3	63,9
blank	16,7	9,7	9,7	5,9

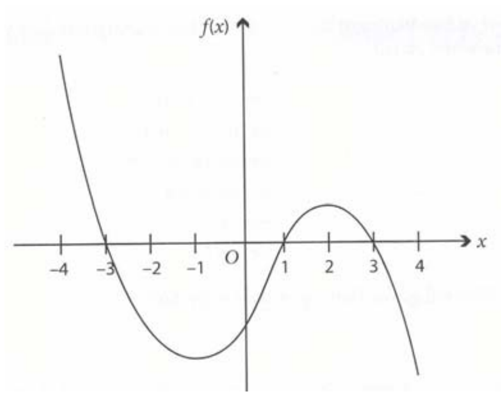
Tabell 7.9 Svarfordelingen for oppgaven om kjerneregel fra 1998 og 2005. Resultater fra Leiren & Ludvigsen 2005 s 77

Vi ser av tabell 7.9 at elevene både i 1998 og 2005 svarte betydelig bedre på denne typen oppgaver enn i pilotstudien. I de tre flervalgsoppgavene som er presentert i kap 7.2.3, er løsningsprosenten hhv 8.7 %, 17.4 % og 23.4 %, og dette er langt bak nivået både i 1998 og 2005. Legg også merke til hvor få som svarte blankt i både 1998 og 2005, til forskjell fra hvor mange som svarte blankt i pilotundersøkelsen.

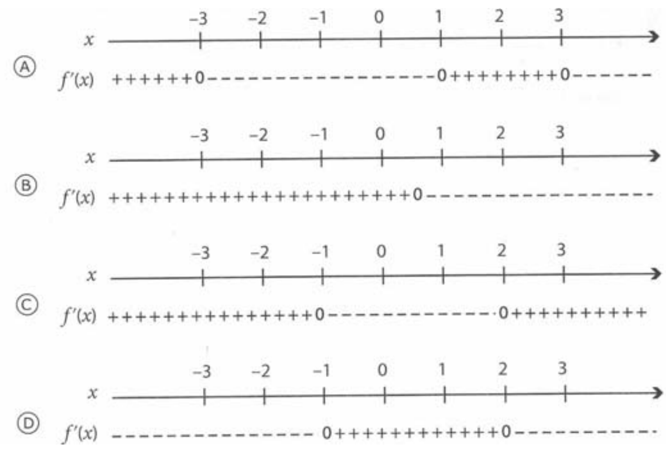
7.2.4 Grafisk derivajonsforsåelse

Grafisk derivasjonsforståelse trenger man for å løse de oppgavene der man blir presentert for en graf, og skal bruke informasjonen grafen gir til å løse oppgaver.

<table>
<tr>
<td>
MA23206 (oppgave 1,5)

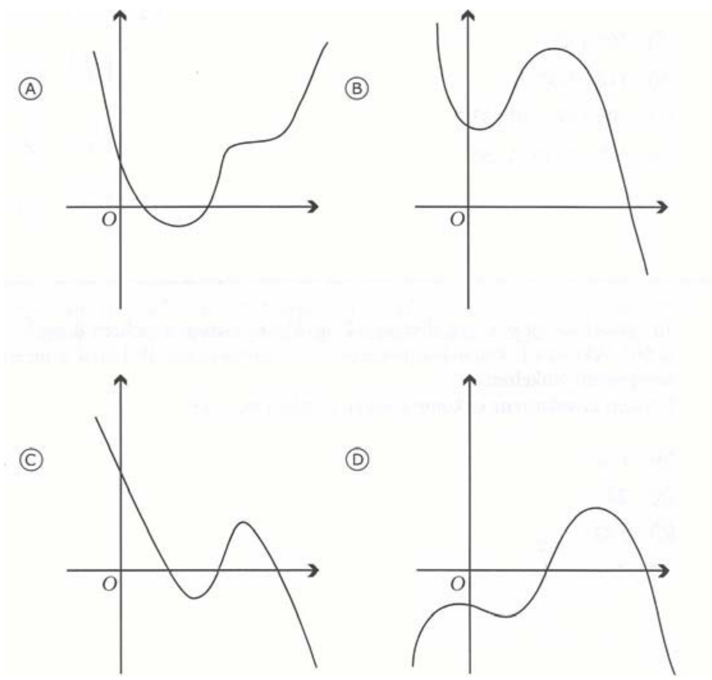


Studer grafen til funksjonen f vist ovenfor. Hvilke diagram viser riktig fortegn for den deriverte funksjonen $f'(x)$?



</td>
<td>
A: 22,1
B: 4,8
C: 4,8
D*: 46,3
Blank: 22,1
</td>
</tr>
</table>

Av resultatene er det klart at flere av elevene har gått i de 3 fellene som alternativ A-C representerer. Alternativ A viser fortegnet til $f(x)$ og ikke til $f'(x)$. Alternativ B viser fortegnet til $f''(x)$, alternativ C er lik alternativ D bortsett fra at fortegnet har blitt invertert. At oppslutningen for alternativ B og C er såpass lav er positivt, så bare et mindretall blander sammen fortegnet til den deriverte med fortegnet til den andrederiverte. 22,1 % blander sammen fortegnet til funksjonen og den deriverte. Dette er for øvrig noe jeg gjenkjenner fra egen undervisningserfaring. Det er tydelig at denne typen oppgaver er norske elever ikke ukjent med, nesten halvparten velger riktig alternativ, og bare 22,1 % svarer blankt. For øvrig var det bare to flervalgsoppgaver som hadde en høyere løsningsprosent enn denne, nemlig oppgave 3,16 (MA23209) og 3,21 (MA23189). MA23209 handler om å finne stigningstallet til en linje gjennom to punkt, og MA23189 handler om å finne den horisontale asymptoten til en funksjon. I disse to oppgavene viser altså elevene god grafisk forståelse. Oppgave MA23206 repeteres i hovedundersøkelsen.

MA23151(oppgave 2,18) Hvilken av grafene nedenfor kan ha alle disse egenskapene? $f(-1) > 0,\ f(3) < 0,\ f'(5) = 0,\ f''(5) < 0$ 	A:12,6 B: 17,2 C*: 21,8 D: 18,8 Blank: 29,7

Et lite flertall har korrekt svar, alternativ C. At alternativ D får såpass stor oppslutning er noe overraskende, særlig tatt i betraktning at denne funksjonen skiller seg fra de tre andre ved å ikke oppfylle det første kriteriet, $f(-1) > 0$. Dette kriteriet skulle man tro var lettere å vurdere enn utsagn om den deriverte og den dobbeltderiverte. Dessuten er de tre neste utsagnene av en mer komplisert natur, man kan ikke bare bruke én informasjonsbit for å gjøre en korrekt konklusjon, man må se på disse utsagnene som en helhet. Grunnen til dette er hovedsaklig det faktum at grafene mangler enheter på aksene, slik at de ikke kan sammenlignes med hverandre for å finne svaret. At alternativ A har lavest oppslutning er muligens fordi denne grafen ser noe rar ut.

	2MX05	3MX05	3MX98	Int95
korrekt	40,3	38,6	53,5	45,5
blank	10,4	10,8	5,2	8,8

Tabell 7.10 Svarfordelingene på oppgaven om kjerneregel fra 1998 og 2005. Resultater fra Leiren & Ludvigsen 2005 s 77

Ved å sammenligne tabell 7.10 med oppgave MA23151 (oppgavene er veldig like), så noteres det at det har vært en økning i blanke besvarelser og en nedgang i antall riktige svar. I 1998 gjorde for øvrig norske elever det veldig bra på denne oppgaven, bare de svenske elevene var bedre (Angell m.fl. 1999 s186).

7.2.5 Derivasjon og anveldelser

I læreplanen finner vi følgende formulering i læreplanen for 2MX: ”elevene skal kunne tolke derivasjon i praktiske sammenhenger, blant annet knyttet til grenseinntekter, grensekostnader, fart og akselerasjon” (kap 9.1) Bruk av derivasjon til å studere forandring er sentralt i de tre lærebøkene jeg har undersøkt, og dette er også naturlig tatt i betraktning læreplanens formulering.

<table>
<tr>
<td>MA23033 (oppgave 2,12)

En stein som slippes i en stille dam forårsaker en sirkelformet bølge som beveger seg med $1,2m/s$. Hvor fort øker arealet av sirkelen når radien er $5,0m$?

10: Partially correct response. Correct method shown but computation error.

20: Correct response. $12\pi m^2/s$ (with or without units) with correct</td>
<td>10: 0,0
20: 0,4
70: 1,7
79: 49,4
Blank: 48,5</td>
</tr>
</table>

work shown. 70: Incorrect response. 12π but no work shown 79: Incorrect response. Other incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	

Ved å se på forandringen i areal per tid kan dette løses algebraisk:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta t} = \frac{\pi(r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2) - \pi r^2}{\Delta t} = \frac{\pi(2r\Delta r + (\Delta r)^2)}{\Delta t}$$

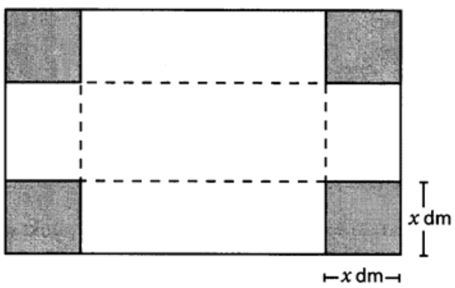
$$\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx 2\pi r \frac{\Delta r}{\Delta t} = 2\pi r v = 2\pi \cdot 5{,}0m \cdot 1{,}2m/s = 12\pi m^2/s$$

Det er lett å se at $2r\Delta r >> (\Delta r)^2$, dermed gjelder tilnærmingen. Dessuten benytter vi oss av at strekningen bølgen tilbakelegger er proporsjonal med farten, dvs $\Delta r = v\Delta t$, og resultatet følger da. Svarfordelingen avslører at bare én eneste elev har løst oppgaven. 1,7 % har riktig svar, men uten å vise hvordan dette er funnet. Det er nok grunn til å tro at de med kode 70 nok har løst denne oppgaven med en eller annen metode, da det nok er ikke særlig sannsynlig at elevene har gjettet riktig svar. Legg merke til at ingen elever blir tildelt kode 10, som er korrekt metode, men med regnefeil. Nesten alle elevene svarer enten blankt, eller har galt svar (kode 79). Siden ingen elever har kode 10, og bare 0,4 % har kode 20, mens 1,7 % har riktig svar uten å vise metoden, er det er da nærliggende å tenke at 97,9 % av elevene ikke vet hva de holder må med! Oppgave 1,6 (MA23029) er et tilsvarende problem, og bare én elev har korrekte svar der også. Det kan dermed se ut som bruk av infinitesimale størrelser på denne formen i stor grad er ukjent for norske elever.

MA23049 (oppgave 2,25) En lekebil kjører i en rett linje. Etter t sekunder er farten gitt ved $v = 24 - 5t \ m/s$ A. Hva er lekebilens akselerasjon i m/s^2 etter 2 sekunder? 10: Correct response. -5 with or without units. 70: Incorrect response. +5 71: Incorrect response. 14 79: Incorrect response. Other incorrect (including crossed out,	10: 20,5 70: 2,9 71: 11,3 79: 28,9 Blank: 36,4

erased, stray marks, illegible, or off task)	

For å ha forutsetning for å løse en slik oppgave, må man kjenne til den matematiske sammenhengen mellom fart og akserelasjon, og vi har at $a(t)=v'(t)$. Siden enheten for akserelasjonen er oppgitt, så trenger ikke elevene å kjenne, eventuelt utlede denne. Selve derivasjonen er såpass elementer, at siden 20,5 % svarer riktig, så tyder dette på at disse elevene kjenner til sammenhengen mellom fart og akserelasjon. Elevene som havner i kode 71 har nok beregnet $v(2)=24-5\cdot 2=14$, som tyder på at elevene tror løsningen er å sette inn den oppgitte verdien for variabelen inn i $v(t)$. Disse ser heller ikke ut til å reflektere over at enheten da blir gal. Ved korrekt derivasjon $a(t)=-5$, ser man at akserelasjonen er uavhengig av tiden i denne oppgaven. Elevene med kode 70 er nok elever som har derivert riktig, men tror at akserelasjonen må være en positiv størrelse. MA23049 nesten identisk med oppgave 10 fra Leiren & Ludvigsens studie. Løsningsprosenten var høy, og andelen blanke svar var lav, men det var riktignok en flervalgsoppgave. MA23158 er en flervalgsoppgave, og ved å sammenligne oppgave 10 og MA23158 kan det tyde på en tilbakegang på denne typen oppgaver.

MA23205 (oppgave 3,24)  Et stykke kartong er 80 cm langt og 50 cm bredt. I hvert hjørne blir det kuttet bort et kvadrat med side x dm. Du lager en eske ved å brette langs de stiplede linjene. Eskens volum $V(x)$ vil avhenge av verdien til x. Hva er den største verdien volumet $V(x)$ kan få? 10: Partially correct response. Correct function	10: 1,7 11: 0,4 20: 0,9 21: 4,3 79: 30,9 Blank: 61,7

$V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ 11: Partially correct response. $x = 1$; but no volume found 20: Correct response. $18dm^3$; by differentiation 21: Correct response. $18dm^3$; other method or no method shown 79 Incorrect response. Incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	

For å løse denne oppgaven trenger man et geometrisk argument. Ved å brette opp xdm på hver av kantene som vist på figur, så blir arealet $A(x)$ avgrenset av de stiplede linjene i dm^2 gitt ved: $A(x) = (8-2x)(5-2x)$, og volumet til esken blir dermed: $V(x) = xA(x) = x(8-2x)(5-2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$, der $V(x)$ er gyldig for $0 < x < \frac{5}{2}$.

Maksimal verdi finnes ved å derivere funksjonen:

$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 0 \Rightarrow x = 1 \vee \frac{10}{3}$. Det viser seg at $x = 1$ gir toppunktet, mens $x = \frac{10}{3}$ er utenfor definisjonsområdet. Det maksimale volumet er $V(1) = 18dm^3$.

Det må opplyses at om noen har regnet med cm som enhet, så har man:

$V(x) = xA(x) = x(80-2x)(50-2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x \Rightarrow x = 10 \vee \frac{100}{3}$, men løsningen blir naturligvis de samme siden $1dm = 10cm$. Liten omtenksomhet for enheter er for øvrig noe alle matematikklærere har sett hos sine elever, hvem har ikke hørt om eleven som fant ut at badet hjemme var $15cm^2$ stort? Det er derfor naturlig å forvente at noen elever gjør feil med enhetene i denne oppgaven.

Riktignok kommer denne oppgaven sent i heftet, men om vi legger sammen de fire gruppene med 10- og 20- koder, så er det bare 7,3 % av elevene som ser ut til å vite hva de driver med! Flertallet av disse har funnet løsningen med ”other method, or no method shown”, som i verste fall kan bety ”prøve- og feile-metoden”. Feilkode 10 er for å fange opp alle som finner $V(x)$, men som av ulike grunner ikke kommer videre. Av svarfordelingen går det frem at bare 1,7 % havner i denne koden. Dette må nok forståes slik at de 30,9 % med feilkode 79 ikke finner $V(x)$. Det er nok grunn til å tro at noen av elevene med kode 21 har funnet $V(x)$ og så brukt kalkulatoren for å finne det største volumet, uten at det går tilstrekkelig fram av deres løsningsmetode hva de har gjort. Det er vel ikke mulig å finne rett svar uten å ha vært innom $V(x)$? Personlig er jeg mest overrasket over at 61,7 % svarer blankt. Dette er et høyt tall, men det fins faktisk to oppgaver der prosentandelen blanke svar var enda høyere! Dette er oppgave 1, 25 (MA23153) og oppgave 1,29 (MA23166). MA23153 er omtalt i kap 7.2.1, mens oppgave MA23166 er en oppgave med en funksjon på parameterform, og oppgaven er å finne $\frac{dy}{dx}$ utrykt ved t. Det svake resultatet på MA23166 støtter opp om antagelsen at infinitesimaler faller vanskelig for norske elever, selv om dette ikke er entydig, se tab 7.13 kap 7.3. En oppgave som MA23205 bør ikke være helt ukjent for norske elever, denne oppgaven er nesten helt identisk med et eksempel i et av læreverkene i 2MX, den eneste forskjellen er at målene er 8cm ganger 8cm (Erstad m.fl 2001 s 137). En tendens vi har i denne undersøkelsen er at løsningene som blir funnet på kalkulator, blir ikke tilstrekkelig forklart hvordan de har blitt funnet. Slike besvarelser vil derfor nesten utelukkende ende opp som feilkoder på 70-tallet, siden det er ikke lett å forsvare bruk av 10-og 20-koder på slike besvarelser.

I disse tre oppgavene som er presentert i kap 7.2.5 gjør norske elever det best i oppgave MA23049, dette er ikke helt overraskende siden denne er elementær om man kjenner sammenhengen mellom fart og akselerasjon. MA23049 er veldig lik oppgave 10 fra forrige studie, og resultatene fremgår av tabell 7.11.

	2MX05	3MX05	3MX98	Int95
korrekt	47,3	62,5	34,3	31,5
blank	2,0	0,0	2,7	5,3

Tabell 7.11 Svarfordelingen på oppgave 10. Resultater fra Leiren & Ludvigsen 2005 s 84

Leiren og Ludvigsen knytter framgangen fra 1998 til 2005 på denne oppgaven sammen med den revisjonen som læreplanen gjenomgikk. Den gang var det flere elever som glemte å derivere funksjonen, dette var det klart vanligste feilsvaret for alle elevene både i 1998 og 2005 (Leiren & Ludvigsen 2005 s 84). Denne tendensen finner vi også i oppgave MA23049, men ikke i like stor grad. Dette henger nok sammen med at dette er en åpen oppgave, i motsetning til flervalgsoppgaven fra studien i 1998 og 2005.

7.3 Oppsumering av resultatene

Leiren & Ludvigsen har ikke sammenfattet fordelingene for de 12 oppgavene i tabellform. I tabell 7.12 har dette blitt gjort for 3MX-elevene i 1998 og 2005.

	flervalg				åpne						
	3MX 05		3MX 98		3MX 05			3MX 98			
nr	rett	blank	rett	blank	10	20	blank	10	20	blank	
1	61,9	2,3	74,0	3,1							grafisk
2	74,4	0,0	64,4	2,5							grafisk
3	44,9	6,3	55,5	4,7							grenseverdi
4	20,5	7,4	21,2	7,5							grenseverdi
5	30,1	5,1	40,2	7,3							brøk+kjerne
6	63,6	0,0	72,3	2,2							kjerne
7	38,6	10,8	53,5	5,2							grafisk
8a					-	50,6	16,5	-	53,9	23,4	grafisk
8b					-	5,1	22,7	-	18,4	29,0	grafisk
9	33,0	2,3	35,5	3,9							anvendelse
10	62,5	0,0	34,3	2,7							anvendelse
11					21,6	20,5	17,6	23,0	27,0	38,0	grafisk
snitt	47,7	3,8	50,1	4,3	21,6	25,4	18,9	23,0	33,1	30,1	

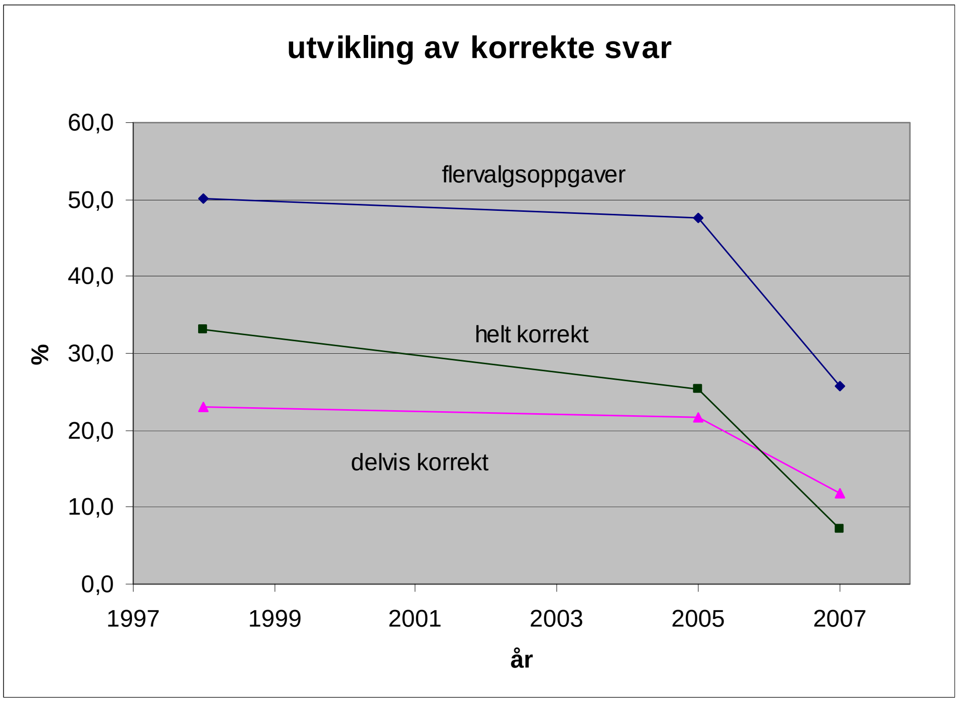
Tabell 7.12 Resultat fra TIMSS 1998 og Leiren & Ludvigsens undersøkelse fra 2005. Informasjon hentet fra Leiren & Ludvigsen. De oppgavene som ikke har 20-kode, har 10-kodene plassert i 20-kodens sted, disse er merket med **-** *(se kap 6.2). Merk: i oppgave 11 er kode 20 blitt til ved å legge sammen resultatet fra to koder*

Fra tabell 7.12 går det fram at elevene i stor grad svarer på flervalgsoppgavene, og i mindre grad svarer på de åpne oppgavene. Elevene svarer også i større grad korrekt på flervalgsoppgavene enn de åpne oppgavene. Denne strukturen gjelder både i 1998 og i 2005. Ved å sammenligne snittene for 1998 og 2005, går det fram at det har vært en liten tilbakegang i resultatene. De eneste oppgavene hvor det har vært en framgang er oppgave 2 og 10. Gjør man en tilsvarende framstilling av resultatene for TIMSS Advanced 2007, så blir resultatet tabell 7.13.

	nr	flevalg rett	blank	åpne 10	20	blank	
23154	4			-	13,4	26,8	brøk
23206	5	46,3	22,1				grafisk
23029	6			0,0	0,4	46,3	anvendelse
23076	8	32,5	26				anvendelse
23089	9	20,8	34,2				tangent
23208	13	29,9	22,1				grafisk
23161	17	8,7	26,4				kjerne
23039	18	23,4	26,4				kjerne
23153	25			-	1,3	79,2	grenseverdi
23037	26	24,2	38,1				parameterform
23166	29			-	5,2	62,3	anvendelse
23198	4			-	2,5	46,0	grafisk
23159	5			-	9,2	30,5	brøk
23165	10			-	3,7	60,7	grenseverdi
23033	12			0,0	0,4	48,5	anvendelse
23035	17			23,8	16,7	33,9	polynomfunksjon
23151	18	21,8	29,7				grafisk
23133	23	21,8	31				kjerne
23163	24	13,0	29,7				parameterform
23049A	25			-	20,5	36,4	anvendelse
23158	2	18,7	31,7				anvendelse
23164	6			10,0	9,1	42,6	potensfunksjon
23168	7	27,8	32,6				grafisk
23157	14			34,8	5,2	38,7	grafisk
23209	16	52,2	24,8				grafisk
23206	19	17,4	32,6				kjerne
23189	21	50,9	30,0				grafisk
23186	22	20,0	35,2				anvendelse
23193	23	7,8	37,4				anvendelse
23205	24			2,1	5,2	61,7	anvendelse
	snitt	25,7	30,0	11,8	7,1	47,2	

Tabell 7.13 Resultat fra TIMSS Advanced 2008 pilotundersøkelse. Merk at de oppgavene som ikke har 20-kode, har 10-kodene plassert i 20-kodens sted, disse er merket med - . Merk: i oppgave 1.25, 2.10, 3.6 og 3.14 er kode 10 blitt til ved å legge sammen resultatet fra to eller flere koder, mens i oppgave 3.24 har flere koder blitt lagt sammen for både kode 10 og 20

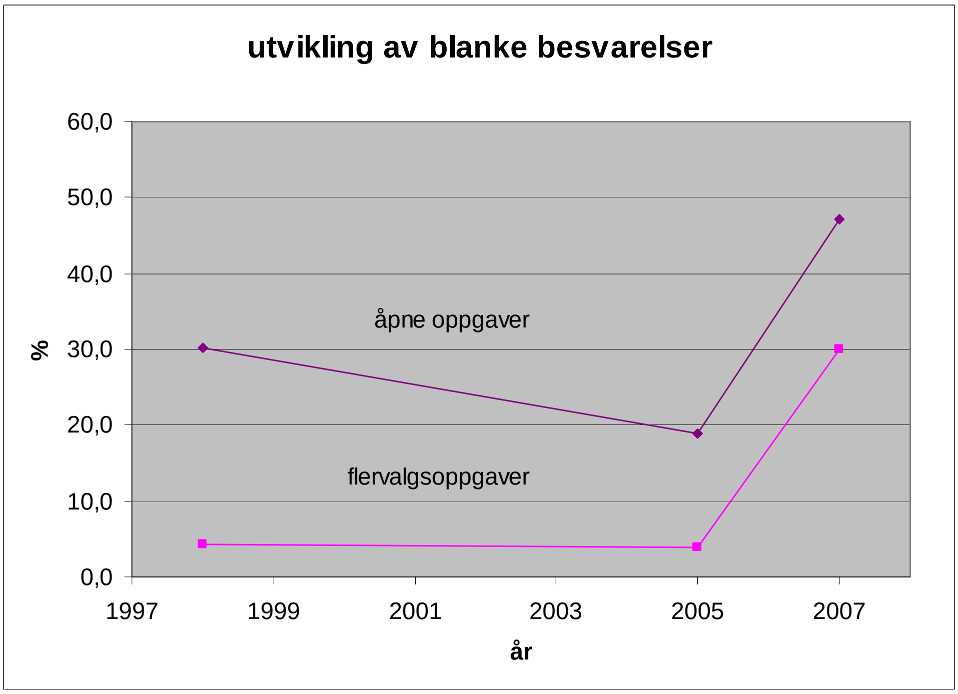
Tabell 7.13 fortjener også en forklaring. Den bolkvise oppdelingen i radene er for å indikere hvilke oppgaver er hhv fra hefte 1, 2 og 3. MA-koden er gitt i kolonne 1, mens nummeret oppgavene har i de respektive heftene er gitt i kolonne 2. Kolonne 3 og 4 viser hvor mange som svarte hhv korrekt og blankt på flervalgsoppgaver, mens kolonne 5, 6 og 7 viser en forenklet svarfordeling for de åpne oppgavene. Forenklingen består i å samle sammen 10- og 20-koder, i de respektive kategorier. Forskjellen mellom tabell 7.12 og 7.13 er slående. Det går fram av resultatene at elevene i 2007 i mye mindre grad svarer korrekt både på flervalgsoppgavene og de åpne oppgavene enn tidligere. Videre ser vi at det er en økning i antall blanke besvarelser i 2007 i forhold til de tidligere undersøkelsene. For å få et inntrykk av denne utviklingen, så har jeg laget to grafiske fremstilling av snittverdiene fra tabell 7.12 og tabell 7.13, se figur 7.6 og figur 7.7.



Figur 7.6 Utvikling av korrekte svar for flervalgsoppgaver og åpne oppgaver i perioden 1998-2007

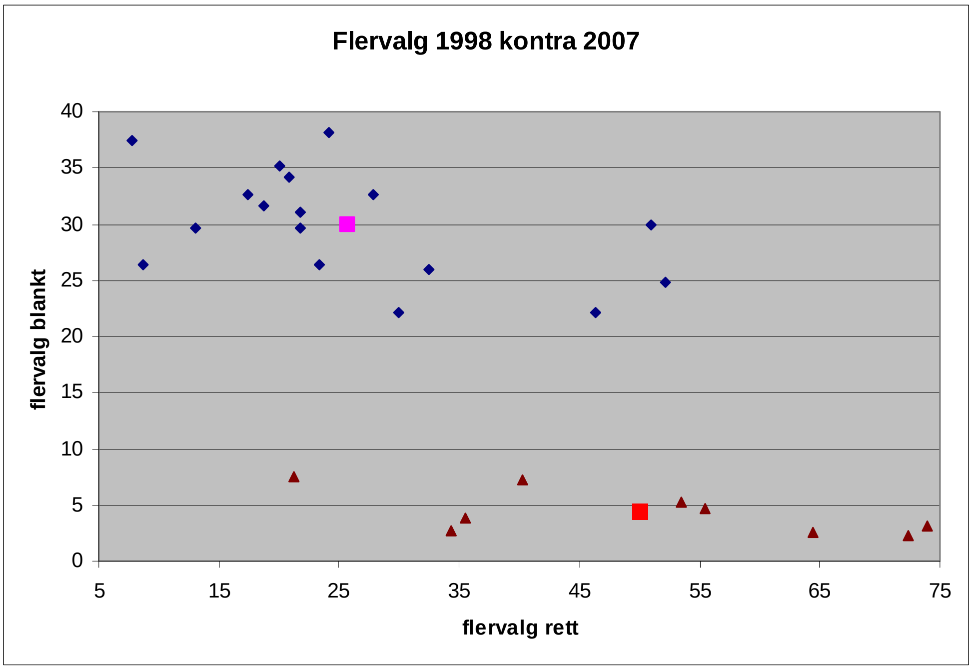
Øverste linje i figur 7.6 viser hvor mange i prosent som svarer korrekt på flervalgsoppgavene. Den mellomste linjen viser hvor mange som har helt korrekt på de åpne oppgavene, og den nederste over hvor mange som har delvis korrekt på de åpne oppgavene, hhv 20-er og 10-er koder. Legg merke til at i tabell 7.12 og tabell 7.13 så har jeg lagt sammen alle 10-er kodene for seg og alle 20-er kodene for seg. Der hvor 10-er kodene i scoringguiden betyr helt korrekt svar, har disse blitt ført opp som 20-kode i tabell 7.12 og tabell 7.13. I denne sammenheng må man være forsiktig med å trekke konklusjoner, det er flere grunner til dette. Som vi har sett er ikke Leiren & Ludvigsens undersøkelse representativ for norske elever. Mitt datamateriale er bare på 700 elever, og dette datagrunnlaget er for lite for å trekke sluttinger for alle elevene i Norge. Figur 7.6 viser at fra 1998 til 2005, så er ikke tilbakegangen spesielt stor, flervalgsoppgavene blir løst i like stor grad, mens det er en liten nedgang i hvor mange som har helt korrekt svar, mens delvis korrekt svar er nesten uforandret. Fra 2005 til 2007 er derimot tilbakegangen påfallende. Om man velger å se bort fra studien i 2005, så viser figur 7.6 en stor tilbakegang både for flervalgsoppgaver og for de åpne oppgaver. Tilbakegangen for flervalgsoppgaver og helt korrekt svar er stor, mens tilbakegangen for delvis korrekt svar er ikke fult så stor. Faktisk er det flere som svarer delvis korrekt enn helt korrekt i undersøkelsen i 2007, mens forholdet mellom disse to kategoriene er omvendt både i 1998 og 2005. Å gi en tolkning av dette er problematisk. Kan dette bety at elevene i 2007 i større grad enn før ikke makter å fullføre resonnementene sine, men gjør regnefeil underveis, eller det stopper opp før de fullfører løsningen? Det kan være nærliggende å tenke slik etter å ha undersøkt svarfordelingene for alle oppgavene og når man ser dette presentert grafisk på denne måten. Det ser også ut til at andelen som svarer korrekt på flervalgsoppgavene i 2007 er lavere enn andelen som svarte helt korrekt på de åpne oppgavene i 1998. Nå var det riktignok med bare 3 åpne oppgaver i 1998, men dette resultatet overrasket meg veldig. Tilbakegangen på flervalgsoppgavene er fra 50,1 % til 25,7 % fra 1998 til 2007, altså nesten en nedgang på 24,4 %.

Hva så med utviklingen av blanke besvarelser i den samme perioden? På tilsvarende måte kan en grafisk vise en utvikling av denne, se figur 7.7.



Figur 7.7 Utvikling av blanke besvarelser i perioden 1998-2007

Øverste linje er utviklingen av hvor mange som svarer blankt på de åpne oppgavene, mens den nederste linjen over hvor mange som svarer blankt på flervalgsoppgavene. Figur 7.7 viser at i studien i 2005 så var det en nedgang i blanke besvarelser, mens antall blanke svar økte kraftig i 2007. Tilbakegangen av blanke besvarelser i 2005 kan nok i stor grad knyttes opp til studentenes tilstedeværelse og personlige engasjement i forkant av og under selve datainnsamlingen. Det er ikke et ukjent fenomen at man skjeper seg litt og tar ting litt mer seriøst når man møter noen med et genuint engasjement, til forskjell fra undersøkelsen i 1998 og 2007 der i stor grad det er læreren eller andre fra skolens personale som gjennomføre testen og det er ikke alltid man som elev blir like motivert av det. Legg merke til at elevene svarte like mye blankt på flervalgsoppgavene i 2007 som elevene svarte på de åpne oppgavene i 1998. Som for figur 7.6, kan vi ikke trekke sikre konklusjoner på bakgrunn av dette, men både figur 7.6 og figur 7.7 gjør i alle fall undertegnede noe betenkt. Om vi plotter resultatet på de 9 flervalgsoppgavene fra 1998 og de 17 flervalgsoppgavene fra 2007 i samme koordinatsystem, der horisontale aksen er hvor mange som løser oppgaven og den vertikale aksen er hvor mange som svarer blankt, blir resultatet figur 7.8.



Figur 7.8 Sammenligning av resultatet på flervalgsoppgavene fra 1998 og 2007. Datapunktene nederst er fra 1998, mens de øverst er fra 2007. De to store kvadratene er gjennomsnittet for de to gruppene, hhv (25.7,30.0) for 2007 og (50.1,4.3) for 1998

Ved å studere figur 7.8 er det klart at i 1998 løste elevene flervalgsoppgavene korrekt i mye større grad og hadde færre blanke besvarelser enn i 2007. I 1998 var ikke andelen blanke besvarelser over 10 % på noen av oppgavene, mens i 2007 var ikke andelen blanke besvarelser under 20 % på noen av oppgavene. Legg også merke til at bare to av oppgavene fra 2007 ble besvart bedre enn snittet fra 1998. Det ser altså ut til at elevene i 2007 nesten gjennomgående løser flervalgsoppgavene dårligere enn i 1998, og har gjennomgående flere blanke besvarelser.

8. Diskusjon

8.1 Utvikling innen derivasjon siden 1998

Tabell 7.12 og 7.13 fra kap 7.3. oppsumerer hovedresultatene til gjennomgangen av elevenes besvarelser i oppgaver innen derivasjon. Med de forbehold som har blitt diskutert i kap 6.3, går det fram at andelen elever som svarer korrekt har gått tilbake, og andelen som svarer blankt har økt. Noen oppgaver løser elevene i stor grad, mens andre oppgaver har bare i liten grad blitt løst.

8.2 Hvorfor er det så mange blanke besvarelser?

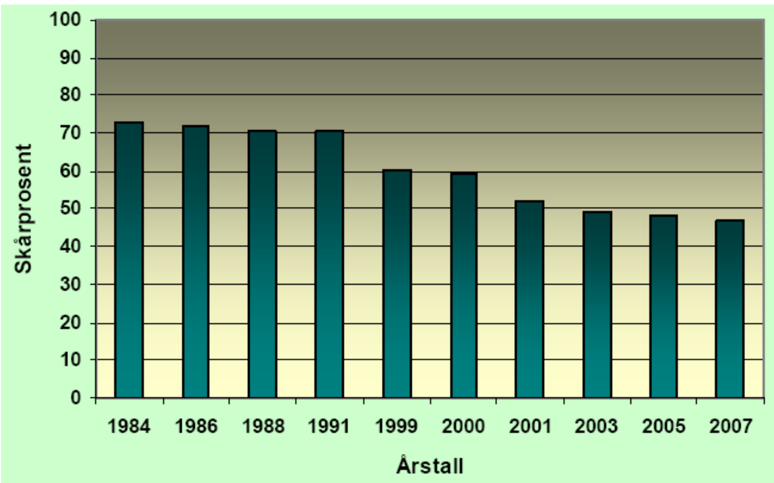
Det fremgår av tabell 7.13 fra kap 7.3 at i snitt svarer 30,0 % av elevene blankt på flervalgsoppgavene og 47,2 % av elevene svarer blankt på de åpne oppgavene. I kap 7.1 så vi at 20,0 % av elevene ikke hadde svart på en eneste av oppgavene, så det er flere som svarer blankt på oppgaver innen derivasjon, enn på de oppgavene som jeg ikke har undersøkt. At en stor gruppe av elevene svarer blankt, kan nok i noen grad knyttes opp til at dette er en pilotundersøkelse. Elevene blir i forkant av undersøkelsen fortalt at dette er en undersøkelse som har hovedsakelig fokusert på uttesting av oppgaver. Kanskje oppfatter elevene at deres besvarelser ikke er interessante, og at det derfor skorter litt på deres motivasjon på å gjøre sitt beste? Elevene får ikke vite hvor bra de har gjort det i undersøkelsen, og vet at dette ikke teller på standpunktskarakteren deres. Denne pilotstudien kommer på vårparten, en tid da mange avgangselever i videregående skole har mye annet å tenke på som nok får et større fokus enn pilotstudien. Jeg tenker i første rekke på tentamener og eksamener som er nært forestående. I samtaler med veiledere har jeg fått vite at det er forholdsvis vanlig at det er flere blanke besvarelser på pilotstudier i forhold til hovedundersøkelser. Det er ikke mulig å si om TIMSS Advanced følger denne tendensen, dette vil bli mulig å undersøke etter hvert som kodingen av datainnsamlingen for hovedundersøkelsen sluttstilles. Forhåpentligvis vil flere elever ta hovedundersøkelsen mer seriøst, enn det som har vært tilfelle med pilotstudien.

8.3 Er det en tilbakegang i matematikkprestasjonene?

TIMSS-studiene gjør det mulig å sammenligningne med tidligere studier (kap 4.2.2). Det er derfor naturlig å stoppe opp og se nærmere på det som datamaterialet kan antyde. Er det riktig at det er ser ut til å være en tilbakegang i matematikkprestasjonene i videregående skole, er det andre faktorer som tyder på det samme? Kap 8.3 presenterer noen observasjoner som ser ut til å støtte dette.

8.3.1 Norsk matematikkråds forkunnskapstest

”Høsten 2007 gjennomførte Norsk matematikkråd sin tolvte undersøkelse av grunnleggende matematisk kunnskap hos studenter som begynte på matematikkrevende studier i Norge” (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2007 s 9). Denne testen ble gjennomført for første gang i 1982, og ”den generelle trenden for resultatet av testene…er ikke oppløftende. Resultatene har uten unntak vært synkende fra 1982 til 2007” (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2007 s 3). Figur 8.1 viser utviklingen i resultatene fra 1984 til 2007.



Figur 8.1 Gjennomsnittlig skår i prosent for norsk matematikkråds undersøkelsene fra 1984 til 2007 (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2007 s 9)

Sammensetningen av respondentene har riktignok endret seg i løpet av disse årene:

> I de første undersøkelsene var innslaget av sivilingeniører og universitetsstudenter stort, mens høyskolestudentene danner en større andel i de senere undersøkelsene. Men i 2001 ble oppgavesettet redusert, der flere av de vanskeligste oppgavene ble tatt vekk. Derfor gir likevel figur 8.1 et rimelig bilde av utviklingen (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2007 s 9).

Legg merke til at alle oppgavene som forekommer i denne testen skal kunne løses ved hjelp av grunnskolens pensum, og det man har lært i løpet av første året av videregående skole (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2007 s 13). I undersøkelsen i 2007 var det med 7389 studenter og 47,5 % av disse hadde tatt 3MX (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2007 s 22 og 24). Figur 8.1 viser en tilbakegang i resultatene i perioden 1999 til 2007 fra 60,3 % til 47, 1 % (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2007 s 31). Tilbakegangen er altså på 13,2 % i denne perioden, som er en betydelig tilbakegang. En av konkusjonene i den offisielle rapporten er at:

> 2007-undersøkelsen bekrefter at vi nå i enda høyere grad enn tidligere har studenter på de matematikkrevende kursene som i stor grad har et utilstrekkelig grunnlag i matematikk å bygge på for høyere utdanning" (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2007 s 83).

Denne tilbakegangen i matematikk samsvarer med den tilbakegangen vi så norske 15-åringer har i PISA (kap 4.1.2) og tilbakegangen blant 4. og 8.- klassinger i TIMSS (kap 4.2.4). En sammenligning med derivasjonsresultatene i TIMSS Advanced og forkunnskapstesten til norsk matematikkråd er ikke helt uproblematisk, siden pensumet slett ikke er sammenfallende. Elevgruppene som har blitt testet har imidlertid i stor grad tilsvarende matematisk bakgrunn, og begge gruppene har en tilbakegang fra slutten av 90-tallet til 2007. En sammenligning er derfor ikke helt unaturlig. Det er videre naturlig å se for seg en sammenheng mellom de svake resultatene blant 8. klassingene i 2003 i TIMSS (kap 4.2.4) og tilbakegangen hos elevene i videregående skole. 8. klassingene fra 2003 har i 2007 snart blitt ferdig med videregående skole, og det er ikke overraskende at deres prestasjoner på videregående er dårligere enn foregående kull. Et av resultatene fra TIMSS 2003 var jo at elevene lå mellom et halvt og ett år etter det nivået like gamle elever lå på i 1995, så det er nok naturlig å tenke seg at elevekullene på det lave 00-tallet ikke har klart å tette dette faglige forspranget som elevene midt på 90-tallet hadde. Det er heller ikke umulig at forspranget bare har økt mot slutten av videregående skole, slik at vi forventer at resultatene for videregående i 1995 og 1998 er bedre enn resultatet i 2007. De resultatene jeg har løftet fram fra pilotundersøkelsen til TIMSS Advanced ser ut til å tyde på dette. Hovedundersøkelsen våren 2008 vil videre belyse om det er grunnlag for en slik konklusjon.

8.3.2 Refleksjon rundt matematikkpensumet

En del sammenligninger kan tyde på at det har skjedde noe med matematikkpensumet i videregående skole. Kap 9.1 sammenligner læreplanene før og etter revisjonen av R94 (revisjonen av studieretningsfagene kom i år 2000). En sammenligning av elever som har fått sin matematikkopplæring før revisjonen med dem som har fått sin matematikkopplæring etter revisjonen, viser at studenter med bakgrunn fra 3MX fra R94 skårer noe bedre enn studenter med 3MX som har sin bakgrunn fra den reviderte utgaven av R94. Dette var tilfellet i norsk matematikkråds undersøkelse både i 2003 og 2005, mens i 2007 var trenden snudd (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2007 s 32). Det må her opplyses at det var veldig få elever som hadde blitt undervist etter opprinnelig R94 med i både 2005 og 2007 (hhv 6,3 % og 2,9 %), siden denne varianten var på vei ut (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2007 s 24). Det er nok naturlig å tenke seg at de få elevene med bakgrunn i den opprinnelig R94 i 2007 var elever som ikke har fullført videregående opplæring på normert tid, og kanskje er disse elevene noe svakere i matematikk?

Lærebøkene og formelsamlingene avslører også at noe har skjedd med matematikkpensumet. Av de tre læreverkene som har blitt forfattet etter revisjonen, og som jeg har undersøkt, er det bare Sandvold m.fl 2001 som i stor grad tar opp de mer tekniske sidene av matematikken. Aschehougs læreverk har gjennomgått en kraftig nedtoning fra 1995 til 2001, og læreboken framstår i dag over 100 sider tynnere og flere kapitler og temaer er utelatt, og særlig mange utledninger/bevis har blitt borte. Sammenligner man formelsamlingen fra 2001 med den fra 1997, ser man at også her har det blitt skåret bort en del. I 1997 var den deriverte av logaritmefunksjonen gitt ved: $f(x)=\ln|x| \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}, x\neq 0$, mens man i 2001 utgaven nøyer seg med å definere denne for bare positive x, og absoluttverditegnet er borte. Formeler for elastiteter er borte, og det samme er også formelen for Newtons metode.

8.4 Er kunnskapsnivået i derivasjon akseptabelt?

En tilnærming til dette spørsmålet er å vurdere oppgavenes vanskelighetsgrad, og å vurdere om oppgavene faller innenfor læreplanens mål. Videre er det også naturlig å undersøke den vektleggingen som lærebøkene legger opp til, siden disse i stor grad vil være normerende for matematikkundervisningen. I kap 5.3.7 er de fem ferdighetene i calculus diskutert, og ved å sammenligne med kap 9.1, så vi at bare noen av disse målene var pensum for norske 3MX-elever. Av de 30 oppgavene som danner testgrunnlaget innenfor derivasjon, vil jeg si at bare de to oppgavene om grenseverdi faller tydelig utenfor et norsk pensum. Oppgavene om infinitesimaler er nok på randen av pensum, og det kan nok diskuteres hvorvidt man skal forvente at elevene skal beherske dette eller ikke. Oppgave MA23039 (kap 7.2.3) har blitt kritisert for å inneholde en skjult oppgave, siden flere elever nok klarer å utføre derivasjonen, men kjenner ikke i tilstrekkelig grad til de trigonometriske identitetene slik at oppgaven kan løses. Oppgave 3,23 (MA23205) er nok også i stor grad uttypisk for elevene. Oppgaven er å finne den største verdien til pq, når man får vite at $p+3q=11$, men oppgaven burde egentlig ikke være vanskelig. I noen få av oppgavene synes jeg personlig at elevene viser god matematisk forståelse, dette gjelder særlig i oppgave 1,5 og 3,21. Ellers er jeg personlig for det meste langt i fra imponert over elevenes resultater. Mange av oppgavene kan nemlig løses ved metoder som har blitt definert til å tilhøre knowing domain, se særlig punkt 3 og 4 kap 9.2. ”determining derivatives of polynomial functions” og ”retrive information from graphs, tables, and other sources", blir løftet fram som 'behaviors' som man forventer i knowing domain. En del av oppgavene er oppgaver som elevene har møtt i sin matematikkopplæring, og som inneholder metoder som må forutsettes kjent for elever som har gjennomført store deler av 3MX. "solve routine problems…similar to those students are likely to have encountered in class" (kap 9.2) finner vi under applying domain, men personlig har jeg ikke inntrykket av at elevene har forutsetning til å gjøre dette. Særlig kap 7.2.2 og kap 7.2.3 inneholder oppgaver som er typiske fra skolematematikken. Flere av oppgavene kan tyde på at elevene i stor grad benytter seg av prosesser, de setter i gang med en deriveringsprosedyre, ofte feilaktig, og det er noe uklart om elevene i tilstrekkelig grad har et godt grep på det matematiske objektets egenskaper. Vi kan også se dette i sammenheng med en abstrakt-atskilt ide (kap 5.3.4), siden vi kan få inntrykk av at elevene i stor grad har en ufullstendig forestilling om derivasjon. Elevene har forståelse eller delvis forståelse av de ulike komponentene, men linken mellom disse komponentene og ideen derivasjon er nok ikke fullgod. Ved å studere tabell 7.13 kap 7.3 ser vi at grafiske derivasjonsoppgaver er nok de som elevene i størst grad løser, og nivået på disse oppgavene kan nok sies å være tilfredsstillende. Ellers er min personlige oppfatning at elevene bare i liten grad løser oppgaver som de burde ha bedre kjennskap til fra skolematematikken.

8.5 Konklusjon

I kap 3.2.1 presenterte jeg en topunkts problemstilling. Påfølgende de to formuleringene så jeg på en del forbehold som må tas før konklusjoner kan trekkes, og jeg repeterer derfor ikke disse her.

Når det gjelder problemstilling 1) om kunnskaper i derivasjon så er det vanskelig å svare på dette fordi elevene har i stor grad en så lav løsningsprosent på de fleste oppgavene, og det er vanskelig å se tydelige generelle mønster i elevbesvarelsene. Noen oppgaver er veldig elementære og er raske å løse, mens andre oppgaver krever god forståelse og noen grad av kreativitet. Noen tendenser utkrystalliserer seg likevel, og for de elevene som har deltatt i pilotundersøkelsen til TIMSS Advanced kan vi konkludere med at:

- Elevene ser ikke ut til å kjenne til grenseverdier i særlig grad, kap 7.2.1 illustrerer dette.
- Flere av oppgavene innen sentrale områdene fra skolematematikken er løst bare i liten grad i denne undersøkelsen. Oppgaver med derivasjon av brøk og bruk av kjerneregelen ser også ut til å medføre problemer.
- Oppgaver med anvendelser blir løst bare i liten grad.
- Det er hovedsakelig grafiske derivasjonsoppgaver som elevene i høy grad løser.
- Analysen tyder videre på at elevene nok ikke i tilstrekkelig grad kjenner mulighetene som ligger i bruk av den grafiske kalkulatoren, siden flere av oppgavene kan løses betydelig raskere ved hjelp av denne.

Problemstilling 2) om utviklingen av kunnskapsnivået, så er det som vi har sett ikke helt uproblematisk å sammenligne verken med TIMSS- studien i 1998 eller med Leiren & Ludvigsens undersøkelse i 2005. Til tross for dette, har jeg likevel gjort en slik sammenligning. Indikasjoner fra andre kilder er også med på å fylle ut dette bilde (se kap 8.3), og det ser derfor ut til å være grunnlag for å konkludere med at:

- Norske matematikkspesialister gjør det merkbart dårligere i TIMSS Advanced 2007 enn i TIMSS-undersøkelsen for den samme aldersgruppen fra 1998, og resultatene fra pilotstudien til TIMSS Advanced er også svakere enn studien til Leiren & Ludvigsen fra 2005.
- Det er også en stor økning i blanke besvarelser i forhold til de to andre undersøkelsene.
- Den faglige tilbakegangen synes å være korrelert med den faglige tilbakegangen som er påvist i undersøkelsen til norsk matematikkråd i den samme perioden.
- Tilbakegangen i TIMSS Advanced kan sees i sammenheng med tilbakegangen i både PISA- undersøkelsene og TIMSS- undersøkelsene på barne- og ungdomskolen. De elevene som gjorde det dårlig på ungdomskolen 2003 i PISA og TIMSS er i 2007 gamle nok til å gjøre det dårlig på videregående også.

8.6 Veien videre

Våren 2007 ble TIMSS 2007 gjennomført i 4. og 8. klasse, den nasjonale rapporten fra denne datainnsamlingen vil foreligge i desember 2008. Disse resultatene vil kaste mer lys over matematikkfaget i skolen, og mange er nok spendte på om den faglige tilbakegangen fra 1995 til 2003 har flatet ut, eller om den fortsetter. Våren 2008 gjennomføres hovedundersøkelsen i TIMSS Advanced, og den internasjonale rapporten planlegges å bli utgitt desember 2009. Den nasjonale rapporten vil nok bli utgitt omtrent på samme tid, og personlig venter jeg spendt på hva datamaterialet har å fortelle.

Litteraturliste

Adams, R & M. Wu (red) (2002). *PISA 2000 Technical Report*, OECD. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/53/19/33688233.pdf

Angell, C., M. Kjærnsli & S. Lie (1999). *Hva i all verden skjer i realfagene i videregående skole?* Universitetsforlaget AS, Oslo.

Brandell, G., G. Leder & P. Nyström (2007). Gender and Mathematics: recent development from a Swedish perspective. ZDM- *The International Journal on Mathematics Education,* Springer, 39, 235-250.

Cobb, P., E. Yackel & T. Wood (1992). Interactions and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics,* Kluwer Academic Publishers, 23, 99-122.

Courant, R. & H. Robbins, (rev I. Steward) (1996). *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*, *2nd ed*. Oxford university press, New York.

Davis, P. J. & R. Hersh (1988). *The mathematical experience*. Penguin books.

Devlin, K. (1998). *The language of mathematics: making the invisible visible*. W. H. Freeman and company, New York.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. I Tall, D. (red.). *Advanced Mathematical Thinking (1991)* 25-41. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Dunham, W. (2005). *The Calculus Gallery. Masterpieces from Newton to Lebesgue*. University Press, Princeton UP.

Eksamenssekretariatet (1997). *Formelsamling i matematikk*. (2. utgåva, 2. opplag). Gyldendal undervisning.

Engelsen, B. U. (2006). *Kan læring planlegges? Arbeid med læreplaner- Hva, hvordan, hvorfor?* Gyldendal Akademisk, Oslo.

Erstad, G., I. Bjørnsgård & O. Heir (1995). *Matematikk 2MX 1. utgave*. H. Aschehoug & CO.

Erstad, G., O. Heir, I. Bjørnsgård, Ø. Borgan & J. Pålsgård (2001). *Matematikk 2MX 1.utgave*, H. Aschehoug & CO.

Garden, R. A. et al. (2006). *TIMSS Advanced 2008 assessment frameworks*, TIMSS & PIRLS international study center, Lynch school of education, Boston College. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://timss.bc.edu/PDF/TIMSS_Advanced_AF.pdf

Gjone, G. (2006). Den matematikkdidaktiske forskningen i Norge – Nordisk utvikling og internasjonal påvirkning. *Stifinneren/Tangenten*. Bergen, Caspar forlag.

Grønmo, L. S., O. K. Bergem, M. Kjærnsli, S. Lie & A. Turmo (2004a). *TIMSS 2003 med få ord. En kortversjon av den nasjonale rapporten: "Hva i all verden har skjedd i realfagene?"*. Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://www.timss.no/rapport2003/Kortrapport_2003.pdf

Grønmo, L. S., O. K. Bergem, M. Kjærnsli, S. Lie & A. Turmo (2004b). *Hva i all verden har skjedd i realfagene? Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003.* Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://www.timss.no/timss05_03.html

Hafstad, A. (2008). *Halvparten strøk på mattekurs*. Lastet ned 28. april, 2008, fra http://www.aftenposten.no/nyheter/iriks/article2181937.ece

Heath, T. L., (1956). *The thirteen books of Euclid's elements, volum I, II and III, 2nd ed.* Dover Publications, Inc, New York.

IEAa (oppdatert 2007). Lastet ned 28. april, 2008 fra http://www.iea.nl/brief_history_of_iea.html

IEAb (oppdatert 2007). Lastet ned 28. april, 2008 fra http://www.iea.nl/pilot_twelve-country.html

Institutt for lingvistiske og nordiske studier (oppdatert 16. juli 2007). Lastet ned 28. april, 2008 fra http://www.dokpro.uio.no/ordboksoek.html

Katz, V. J. (1998). *A history of mathematics: an introduction, 2nd edition*. Addison-Wesley Educational Publishers, Inc.

Kielland, A., L. (1999). *Gift*. Gyldendal.

Kjærnsli, M., S. Lie, R. V. Olsen, A. Roe & A. Turmo (2004). *Rett spor eller ville veier? Norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2003,* Universitetsforlaget. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://www.pisa.no/pdf/PISAHovedrapport2003.pdf

Kjærnsli, M., S. Lie, R. V. Olsen & A. Roe (2007). *Tid for tunge løft. Norske elevers kompetanse i naturfag, lesing og matematikk i PISA 2006,* Universitetsforlaget. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://www.utdanningsdirektoratet.no/upload/Forskning/Internasjonale_undersokelser/Tid_for_tunge_loft.pdf

Kleve, B. (1994). *En testteoretisk og diagnostisk analyse av flervalgsoppgaver i matematikk fra TIMSS' pilottest. Hovedfagsoppgave i realfagdidaktikk.* Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet/ILS, Universitetet i Oslo.

KUF, Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet (1994). *Reform '94 Videregående opplæring*. Nye læreplaner. Oslo

KUF, Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet (1999). *Læreplan for videregående opplæring, Matematikk, Felles allment fag i alle studieretninger*. Oslo. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://www2.udir.no/dav/B5D7BE045C.doc

KUF, Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet (2000). *Læreplan for videregående opplæring, Matematikk, Studieretning for allmenne, økonomiske og administrative fag.* Oslo. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://www.udir.no/upload/larerplaner/al_ok_adm/matematikk_2mx_3mx_2mz_3mz.rtf

Leiren, B. & S. Ludvigsen (2005). *Derivasjon i videregående skole- en komparativ studie av norske og finske elever.* Institutt for matematiske fag, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Lie, S., M. Kjærnsli & G. Brekke (1997).*Hva i all verden skjer i realfagene? Internasjonalt lys på trettenåringers kunnskaper, holdninger og undervisning i norsk skole.* Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Lie, S., C. Angell & M. Kjærnsli (1998). *Kunnskaper og holdninger i realfag i videregående skole. Rapport med resultater fra populasjon 3 i TIMSS-prosjektet. TIMSS-rapport nr 29.* Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://www.timss.no/r_3_95_p3.html

Lindstrøm, T. (1995). *Kalkulus 2. utgave*. Universitetsforlaget, Oslo.

Martin, M. O. & D. L. Kelly (1996). TIMSS. *Technical report. Volume I: Design and development.* Boston College, Chestnut Hill. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://timss.bc.edu/timss1995i/TIMSSPDF/TRall.pdf

Marsden, J. E. & M. J. Hoffman (1993). *Elementary classical analysis 2nd edition*. W. H. Feeman and company, New York.

Mellin-Olsen, S. (1981). Instrumentalism as an educational concept. *Educational Studies in Mathematics,* D. Reidel Publishing Co, Dordrecht, Holland and Boston, U.S.A, 12, 351-367.

Mullis, I. V. S. & M. Martin (1996). *TIMSS. Quality assurance in data collection*, Boston College, Chestnut Hill.

Mullis, I. V. S. et al. (1998). *Mathematics and science achievement in the final year of secondary school: IEA's third international mathematics and science study (TIMSS).* TIMSS international study center, Lynch school of education, Boston College. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://timss.bc.edu/timss1995i/TIMSSPDF/C_full.pdf

Mullis, I. V. S., M. O. Martin, E. J. Gonzalez & S. J. Chrostowski (2004). *TIMSS 2003 international mathematics report- findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the forth and eight grades.* TIMSS & PIRLS international study center, Lynch school of education, Boston College. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://timss.bc.edu/PDF/t03_download/T03INTLMATRPT.pdf

Mullis, I. V. S. et al. (2005). *TIMSS 2007 assessment framework.* TIMSS & PIRLS international study center, Lynch school of education, Boston College. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://timss.bc.edu/TIMSS2007/PDF/T07_AF.pdf

Møller, D-E. (2006). *Symbolregner i 3MX; en analyse av en 3MX- klasses bruk av symbolregner, med vekt på logaritmefunksjoner.* Hovedoppgave i realfagdidaktikk, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 40, 1-24.

OECD (2003). *The PISA 2003 assessment framework- mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills.* OECD. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf

Oldervoll, T., O. Orskaug & A. Vaaje (2001). *Sinus 2MX grunnbok*. J. W. Cappelens forlag AS, Oslo.

Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number.* Routledge and Kegan, London.

Pirie, S. & T. Kieren (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it*? Educational Studies in Mathematics,* Kluwer Academic Publishers, 26, 165-190.

PISAa. (Oppdatert 01, feb, 2006). Lastet ned 28. april, 2008, fra http://www.pisa.no/s_maal.html

PISAb. Lastet ned 28. april, 2008, fra http://www.pisa.oecd.org/pages/0,3417,en_32252351_32235968_1_1_1_1_1,00.html

Ramnefjell, E. (2001). *Fersk internasjonal undersøkelse Norge er skoletaper*. Lastet ned 28. april, 2008, fra http://www.dagbladet.no/tekstarkiv/artikkel.php?id=5001010066656&tag=item&words=Cl%20met

Rasch-Halvorsen, A. & H. Johnsbråten (2007). *Norsk matematikkråds undersøkelse Høsten 2007*. Høgskolen i Telemark avd. EFL Notodden. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://matematikkradet.no/rapport2007/NMRRapportH2007.pdf

Sandvold, K. E. et al. (2001). Matematikk 2MX formel og fakta 1 utgåve. Gyldendal undervisning.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* Kluwer Academic Publishers, 22, 1-36..

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Sjøberg, S. (2008). *Norsk skole styrt fra Pisa i Paris?* kronikk i Utdanning nr 04/08. [Online]. Lastet ned 28.april, 2008, fra http://www.utdanningsnytt.no/templates/udf20____16147.aspx?mode=print

TIMSSa. (oppdatert 31. jan, 2006). Lastet ned 28. april, 2008 fra http://www.timss.no/r_3_95_deltaker.html

TIMSSb. (oppdatert 31. jan, 2006). Lastet ned 28. april, 2008 fra http://www.timss.no/timss05_maal.html

TIMSSc. Lastet ned 28. april, 2008 fra http://www.timss.no/oppgaver/r_3_fri_m_p3_spes.pdf

TIMSS Advanced 2008 field test (2007). *Scoring guides for constructed-response items, x* TIMSS & PIRLS international study center. Lynch school of education, Boston College.

TIMSS Advanced 2008 generalprøve (2007). *Matematikk hefte 1, 2 og 3.* Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

TIMSS Advanced 2008 (2008). *Matematikk hefte 1, 2, 3 og 4.* Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Utdanningsdirektoratet (2001). *Formelsamling i matematikk*. (3.utgave, 20. opplag). Gyldendal undervisning.

VG (2004). *Svakere enn Ghana og Botswana*. Lastet ned 28. april, 2008, fra http://www.vg.no/nyheter/innenriks/artikkel.php?artid=101717

Wedege, T. (2007). Gender perspectives in mathematics education: intentions of research in Denmark and Norway. I: ZDM- *The International Journal on Mathematics Education,* Springer, 39, 251-260.

White, P. & M. Mitchelmore (2002). Teaching and Learning Mathematics by Abstraction. I Tall, D. & M. Thomas (red.). *Intellligence, Learning and Understanding in Mathematics*. Post Pressed, Flaxton, s. 235-256.

9. Appendix

9.1 læreplan R94 i matematikk, alm.øk.adm.

Følgende sammenligning av læreplanene er basert på læreplanene i R94, og følger tett opp til den sammenligningen som er gjort av Leiren & Ludvigsen 2005 s 51-53.

I denne tabellen er de læreplanmålene som omhandler integrasjon blitt fjernet, dette for å spare plass. For fullstendige læreplaner, se KUF 1994, 1999 og 2000.

Reform ’94 (opprinnelig)	Reform ’94 (revidert)
Grunnkurs Modul 2B/ 1MX	
Mål 7: Funksjonslære	Mål 9: Funksjonslære
Elevene skal bli vant til funksjons-begrepet og lære seg å tegne grafer med og uten IT-midler. De skal få en første innføring i derivasjonsbegrepet og bli fortrolige med det gjennom enkle eksempler.	Elevene skal forstå funksjonsbegrepet. De skal kunne tegne og tolke funksjonsgrafer og kunne bruke funksjoner i praktiske situasjoner. De skal ha kjennskap til ideene som ligger til grunn for derivasjon og integrasjon
Hovedmomenter:	Hovedmomenter:
Elevene skal	Elevene skal
•kjenne sammenhengen mellom lineære funksjoner og rette linjer, forstå begrepet stigningstall, og kunne finne likningen til en rett linje når enten to punkter eller ett punkt og stigningstallet er kjent	•kunne bruke lommeregneren til å finne topp- og bunnpunkter og kunne tolke resultatet i praktiske situasjoner •kjenne sammenhengen mellom lineære funksjoner og rette linjer, kunne finne

•forstå den geometriske begrunnelsen for derivasjon og kunne derivere enkle funksjoner •kunne bruke formlene for den deriverte til en sum og et produkt •bruke derivasjon til å bestemme bunnpunkter, toppunkter og tangenter til enkle kurver •bruke derivasjon til å løse enkle uoppstilte maksimal- og minimumsproblemer	funksjonsuttrykket for en linje ved regning, kunne beregne stigningstallet og tolke det i praktiske situasjoner •kjenne begrepene gjennomsnittlig og momentan vekst, kunne finne tilnærmede verdier for den momentane veksten ved regning, kunne bruke lommeregneren til å finne momentan vekst og kunne tolke momentan vekst i praktiske situasjoner •kjenne til hvordan arealet under en funksjonsgraf kan tilnærmes med rektangler, kunne bruke lommeregneren til å beregne slike arealer og kunne tolke disse arealene i praktiske situasjoner
2MX Mål 6: Grenser og deriverte Elevene skal kjenne det teoretiske grunnlaget for differensialregning, kunne beregne grenser og deriverte og kunne utnytte denne kunnskapen til å løse praktiske problemer. Hovedmomenter Elevene skal •kjenne begrepet grenseverdi og kunne regne ut grenseverdien til enkle,	Mål 5: Derivasjon og integrasjon Elevene skal kjenne det teoretiske grunnlaget for differensial- og integralregningen, kunne derivere sammensatte funksjonsuttrykk og integrere enkle funksjoner Hovedmomenter: Elevene skal •kjenne begrepene grenseverdi og kontinuitet

ubestemte uttrykk •kjenne kontinuitetsbegrepet og ut fra utseendet til funksjonsgrafen kunne avgjøre hvor en funksjon er kontinuerlig, og hvor den er deriverbar •kunne derivere potensfunksjoner og trigonometriske funksjoner •kunne derivere summer, differanser, produkter, kvotienter og sammensatte funksjoner •kunne bruke første- og andre-deriverte til å drøfte grafen til en funksjon	•kjenne definisjonen av derivert og kunne bruke definisjonen til å derivere enkle funksjoner •kunne derivere summer, differenser, produkter, kvotienter og sammensatte funksjoner •kunne derivere potensfunksjoner, eksponentialfunksjoner og den naturlige logaritmefunksjonen •forstå sammenhengen mellom forløpet til funksjoner og fortegnet til deres første- og andrederiverte, og kunne bruke denne sammenhengen til å studere polynomfunksjoner •kunne tolke derivasjon i praktiske sammenhenger, blant annet knyttet til grenseinntekter, grensekostnader, fart og akselerasjon, og kunne bruke integrasjon til å beregne arealer og finne det samlede resultatet av en prosess •kjenne til den historiske fremveksten av differensial- og integralregningen
3MX Mål 3: Funksjonslære Elevene skal kunne regne med eksponential- og logaritmefunksjoner.	 Mål 4: Trigonometriske funksjoner Elevene skal kunne regne med trigonometriske funksjoner og kunne

De skal kunne analysere funksjoner og bruke de til å løse praktiske problemer. Hovedmomenter Elevene skal •kunne derivere eksponential- og logaritmefunksjoner •kunne bruke metoden til Newton for å finne nullpunkt og skjæringspunkt	bruke dem til å løse praktiske problemer Hovedmomenter: Elevene skal •kunne derivere og integrere trigonometriske funksjoner

9.2 Advanced Mathematics Cognitive Domains

Det er tre slike kognitive domener, knowing, applying og reasoning.

	Behaviors Included in the Knowing Domain	
1	**Recall**	Recall definitions, terminology, notation, mathematical conventions, number properties, geometric properties.
2	**Recognize**	Recognize entities that are mathematically equivalent (e.g., different representations of the same function or relation).
3	**Compute**	Carry out algorithmic procedures (e.g., determining derivatives of polynomial functions, solving a simple equation).
4	**Retrieve**	Retrieve information from graphs, tables, or other sources.

Garden m.fl. 2006 s 19

	Behaviors Included in the Applying Domain	
1	**Select**	Select an efficient/appropriate method or strategy for solving a problem where there is a commonly used method of solution.
2	**Represent**	Generate alternative equivalent representations for a given mathematical entity, relationship, or set of information.
3	**Model**	Generate an appropriate model such as an equation or diagram for solving a routine problem.
4	**Solve Routine Problems**	Solve routine problems, (i.e., problems similar to those students are likely to have encountered in class). For example, differentiate a polynomial function, use geometric properties to solve problems.

Garden m.fl. 2006 s 20

	Behaviors Included in the Reasoning Domain	
1	**Analyze**	Investigate given information, and select the mathematical facts necessary to solve a particular problem. Determine and describe or use relationships between variables or objects in mathematical situations. Make valid inferences from given information.
2	**Generalize**	Extend the domain to which the result of mathematical thinking and problem solving is applicable by restating results in more general and more widely applicable terms.
3	**Synthesize/ Integrate**	Combine (various) mathematical procedures to establish results, and combine results to produce a further result. Make connections between different elements of knowledge and related representations, and make linkages between related mathematical ideas.
4	**Justify**	Provide a justification for the truth or falsity of a statement by reference to mathematical results or properties.
5	**Solve Non-routine Problems**	Solve problems set in mathematical or real-life contexts where students are unlikely to have encountered similar items, and apply mathematical procedures in unfamiliar or complex contexts.

Garden m.fl. 2006 s 22